ফাংশন ও ফাংশনের লেখচিত্র
(Functions and Graph of Functions)

ভূমিকা

অনেক সময় আমরা বিভিন্ন সেটের উপাদানগুলোর মধ্যে বিভিন্ন সম্পর্ক বিবেচনা করি। এই সম্পর্ককে গণিতের পরিভাষায় অন্বয় বলা হয়। আবার সেটের মত ফাংশনের ধারণাও গণিতে একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। ব্যবহারিক প্রয়োজনে দুইটি চলক অথবা দুইটি সেটের মধ্যে ফাংশনের সম্পর্ক বিবেচনা করা হয়। অন্বয় ও ফাংশনের ধারণা ও বিভিন্ন ফাংশনের লেখচিত্র সম্পর্কে আপনারা পূর্ববর্তী শ্রেণিতে জ্ঞান অর্জন করেছেন। এ ইউনিটে আপনারা গণিতের ব্যবহারিক জ্ঞান প্রয়োগ করে কিভাবে বিভিন্ন ফাংশনের লেখচিত্র অংকন করা যায় সে সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি -

- অন্বয় ও ফাংশন ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- অন্বয় ও ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে পারবেন,
- বিভিন্ন প্রকার ফাংশন উদাহরণসহ ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- ফাংশনটি কি ধরনের তা নির্ণয় করতে পারবেন,
- দ্বিঘাত ফাংশনের স্কেচ করতে পারবেন,
- ফাংশনের স্কেচের বৈশিষ্ট লিখতে পারবেন,
- পরমমান ফাংশনের স্কেচ করতে পারবেন,
- লগারিদমিক ফাংশনের স্কেচ করতে পারবেন,
- ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের স্কেচ করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ১০ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ২.১ অন্বয় ও ফাংশন (Concord and Function)

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- অন্বয় ও ফাংশন ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- অন্বয় ও ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	অন্বয়, ফাংশন, ডোমেন, রেঞ্জ

মূলপাঠ

অন্বয় (Concord): যে কোন দুইটি অশূন্য সেট A এবং B এর কার্তেসীয় গুণজ সেটের যে কোন উপসেট কে অন্বয় বা সম্পর্ক বলে।

উদাহরণ : মনে করুন, $A = \{1,2,3\}$ এবং $B = \{1,5\}$

$$A\times B = \{(1,1),(1,5),(2,1),(2,5),(3,1),(3,5)\}$$
$$R_1 = \{(1,1),(1,5),(2,5),(3,5)\}$$
$$R_2 = \{(2,1),(3,1)\}$$

উপরোক্ত R_1, R_2 প্রত্যেকেই $A\times B$ এর উপসেট এবং A সেট থেকে B সেটে একটি অন্বয়।

আবার $A\times A$ গুনজ সেটের যে কোন উপসেট A সেট থেকে A সেটে অন্বয় সূচিত করে।

কার্তেসীয় গুনজ সেটের উপসেট গুলোকে অনেক সময় বর্ণিত সম্পর্কের আলোকেও গঠন করা যায়।

যেমন: $R_1 = \{(x,y)|x \leq y\}$

$R_2 = \{(x,y)|x > y\}$

$R_3 = \{(x,y)|y = x+2\}$ $i,e\ R_3 = \{(3,5)\}$

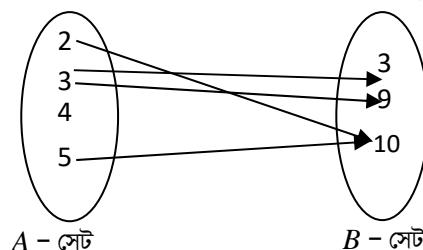
$R_4 = \{(x,y)|y = x+1\}$ $i,e\ R_4 = \varphi$

অন্বয়ের ডোমেন এবং রেঞ্জ (Domain and Range of Concord): কোন অন্বয়ের সদস্য ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদান নিয়ে গঠিত সেট কে অন্বয়ের ডোমেন এবং দ্বিতীয় উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে রেঞ্জ বলে।

যেমন : উপরে বর্ণিত R_1 অন্বয়ের ডোমেন $= \{1,2,3\}$ এবং রেঞ্জ $= \{1,5\}$

R_2 অন্বয়ের ডোমেন $= \{2,3\}$ এবং রেঞ্জ $= \{1\}$

বিপরীত অন্বয় (Inserse of Concord): কোন অন্বয় R এর সদস্য ক্রমজোড়ের প্রথম এবং দ্বিতীয় উপাদান পরস্পর স্থান বিনিময় করলে বিপরীত অন্বয় R_1^{-1} পাওয়া যায় যা উপরে বর্ণিত R_1 অন্বয়ের বিপরীত অন্বয় $R_1^{-1} = \{(1,1),(5,1),(5,2),(5,3)\}$

অন্বয়ের চিত্রিত রূপ: মনে করুন $A = \{2,3,4,5\}$ এবং $B = \{3,9,10\}$ দুটি সেট

A সেটের যে সমস্ত সদস্য দ্বারা B সেটের সদস্য বিভাজ্য হয় তাদের মধ্যে সম্পর্ক গঠন করা হয়েছে, এরূপ সম্পর্কিত সদস্যদের দ্বারা গঠিত ক্রমজোড়গুলোর সেট M গঠন করুন।

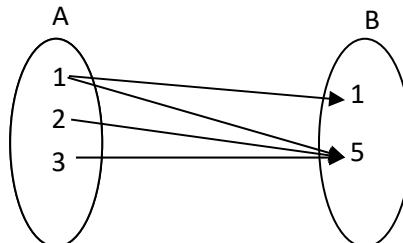
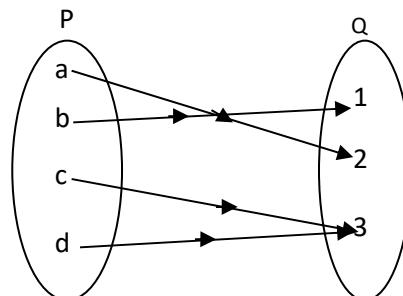
$M = \{(2,10), (3,3), (3,9), (5,10)\}$

এই M সেটটি দ্বারা বিভাজ্যতা সম্পর্কটি বর্ণনা করা যায়।

অর্থাৎ $M = \{(x, y) | x \in A, y \in B$ এবং x দ্বারা y বিভাজ্য$\}$

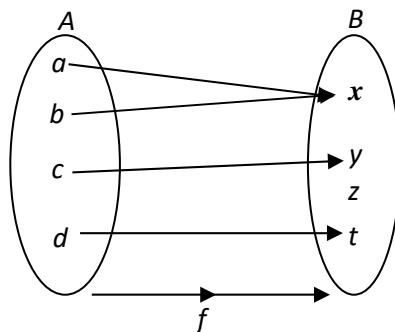
ফাংশন (Function): অশূন্য দুটি সেট A এবং B এর কার্তেসীয় গুনজ সেটের যে কোন উপসেটকে অন্বয় বলা হয় কিন্তু যে কোন উপসেটকে ফাংশন বলা যায় না।

ফাংশন এক বিশেষ ধরনের অন্বয়। ফাংশনের ক্ষেত্রে ডোমেন সেটের প্রতিটি উপাদান কো ডোমেন সেটের একটি অনন্য উপাদানের সাথে সম্পর্কযুক্ত হয়।

$R_1 = \{(1,1), (1,5), (2,5), (3,5)\}$ এর চিত্রিত রূপ

R_1 অন্বয়টি ফাংশন নয় কারণ, $1 \in A, 1 \in B$ এবং $5 \in B$ এর সাথে অন্বিত বা সম্পর্কযুক্ত।

চিত্রিত অন্বয়টি ফাংশন, কারণ P সেটের সকল উপাদান Q সেটের কোন একটি উপাদানের সাথে সম্পর্কযুক্ত।

ফাংশনের ডোমেন, কোডোমেন এবং রেঞ্জ (Domain, Co-domain and Range of Functions):

কোন ফাংশন বর্ণনা করতে প্রথম সেটকে ডোমেন, দ্বিতীয় সেটকে কোডোমেন এবং কোডোমেনের যে সব উপাদান ডোমেনের উপাদানের সাথে যুক্ত হয় তাদের সেটকে রেঞ্জ বলে।

যেমন :

f ফাংশনের ডোমেন $= \{a, b, c, d\}$

f ফাংশনের কো-ডোমেন $= \{x, y, z, t\}$

f ফাংশনের রেঞ্জ $= \{x, y, t\}$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে, দুটি চলক x এবং y যদি এরূপভাবে সম্পর্কযুক্ত হয় যে x এর প্রতিটি মানের জন্য y এর একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায় তবে y কে x এর ফাংশন বলা হয়। এক্ষেত্রে, $y = f(x)$ বা $y = g(x)$ বা $y = \phi(x)$ ইত্যাদি প্রতীকের সাহায্যে লিখা হয়।

x কে স্বাধীন চলক এবং y কে অধীন চলক বলা হয়।

উনিশ শতকের গোড়ার দিকে গণিতবিদগণ "ফাংশন" বলতে নির্দিষ্ট কোন ফর্মূলাকে বুঝাতেন যেমন :

$f(x) = x^2 + 3x - 5$

যা কোন বাস্তব সংখ্যা এবং $f(x)$ এর সাথে সম্পর্কযুক্ত। এখানে, $f(0) = -5, f(1) = -1, f(5) = 35$

উদাহরণ: $f : R \to R$ এবং $f(x) = x + 3$ একটি ফাংশন কারণ সকল $x \in R$ এর জন্য $f(x)$ এর একটি মান পাওয়া যাবে।

f ফাংশনের ডোমেন কে ডোমেন f দ্বারা সূচিত করা হয়।

f ফাংশনের রেঞ্জ কে রেঞ্জ f দ্বারা সূচিত করা হয়।

ফাংশনের ডোমেন নির্ণয়ের নিয়ম:

(i) ভগ্নাংশ আকারের ফাংশনের ক্ষেত্রে বাস্তব সংখ্যা x এর যে সকল মানের জন্য ভগ্নাংশের হর শুন্য হয় সেসব বাস্তব সংখ্যা x ডোমেন থেকে বাদ দিতে হবে।

(ii) কোন ফাংশন $\sqrt{f(x)}$ আকারের থাকলে, ঋণাত্মক হবে না অর্থাৎ $f(x) > 0$ হবে।

(iii) কোন ফাংশন $\frac{\sqrt{g(x)}}{\sqrt{h(x)}}$ আকারে থাকলে লবের $g(x) \geq 0$ এবং হরের $h(x) > 0$ হবে।

(iv) লগারিদমিক ফাংশনে ধনাত্মক মান বসাতে হবে।

উদাহরণ 1: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 7\}$

f : A→B, ফাংশনটি $f(x) = x + 1$ দ্বারা বর্ণিত হলে, ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $f(x) = x + 1$ এবং ডোমেন $A = \{1, 2, 3, 4\}$,

$f(1) = 1 + 1 = 2,\ f(2) = 2 + 1 = 3$

$f(3) = 3 + 1 = 4,\ f(4) = 4 + 1 = 5$

$\therefore$ ডোমেন $f = \{1,2,3,4\}$ এবং রেঞ্জ $f = \{2,3,4,,5\}$

উদাহরণ 2: $f : R \to R$ ফাংশনটি $f(x) = x^2$ দ্বারা বর্ণিত।

সমাধান: ফাংশনটির ডোমেন বাস্তব সংখ্যার সেট R এবং রেঞ্জ সকল বাস্তব বর্গ সংখ্যা।

উদাহরণ 3: $f : R \to R$ ফাংশনটি $f(x) = \cos x$ দ্বারা বর্ণিত, যেখানে x এর মান ডিগ্রীতে দেওয়া আছে।

সমাধান: ফাংশনটির ডোমেন বাস্তব সংখ্যার সেট R এবং রেঞ্জ -1 থেকে 1 পর্যন্ত সকল বাস্তব সংখ্যা।

উদাহরণ 4: ফাংশনটি নিম্নরূপ ভাবে বর্ণিত এদের ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় করুন:

(i) $f(x) = \sqrt{x - 2}$ (ii) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ (iii) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

(iv) $f(x) = log_{10}(1 - x)$ (v) $f(x) = 2sinx$ (vi) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 6}$

সমাধান: (i) $f(x) = \sqrt{x - 2}$

$f(x)$ সংঙ্গায়িত হবে যদি এবং কেবল যদি $x - 2 \geq 0$ বা $x \geq 2$ হয়।

$\therefore$ ডোমেন $f = \{x \in R | x \geq 2\}$

এখন ডোমেন থেকে x এর মান $f(x)$ এ বসালে 0 বা তার চেয়ে বড় সংখ্যা পাওয়া যায়।

$\therefore$ রেঞ্জ $f = \{y \in R | y \geq 0\}$

(ii) $f(x) = \frac{1}{x+2}$
$f(x)$ সংগায়িত হবে যদি এবং কেবল যদি $x + 2 \neq 0$ বা $x \neq -2$ হয়।
$\therefore$ ডোমেন $f = \{x \in R | x \neq -2\}$
বা, $f = R - \{-2\}$
মনে করুন, $y = f(x)$ $\therefore y = \frac{1}{x+2}$
$\Rightarrow y(x+2) = 1$
$\Rightarrow yx + 2y = 1$
$\Rightarrow yx = 1 - 2y$
$\Rightarrow x = \frac{1-2y}{y}$, এখানে $y \neq 0$
রেঞ্জ $f = \{y \in R \mid y \neq 0\}$

(iii) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
$f(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি এবং কেবল যদি $4 - x^2 \geq 0$
বা, $4 \geq x^2$
বা, $x^2 \leq 4$
বা, $|x|^2 \leq 4$
বা, $|x| \leq 2$
বা, $-2 \leq x \leq 2$
ডোমেন $f = \{x \in R | -2 \leq x \leq 2\}$
ডোমেনের মানগুলি $f(x)$ এ বসিয়ে পাই $0 \leq f(x) \leq 2$
$\therefore$ রেঞ্জ $f = \{y \in R | 0 \leq y \leq 2\}$

(iv) $f(x) = log_{10}(1 - x)$
সংজ্ঞায়িত হবে যদি এবং কেবল যদি $1 - x > 0$
বা, $1 > x$ বা, $x < 1$ হয়।
$\therefore$ ডোমেন $f = \{x \in R | x < 1\}$
ডোমেনের মানগুলি $f(x)$ এ বসালে যে কোন বাস্তব মান পাওয়া যাবে।
রেঞ্জ $f = R$

(v) $f(x) = 2sinx$
x এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত
$\therefore$ ডোমেন $f = R$
ডোমেনের যেকোনো মানের জন্য $-1 \leq sinx \leq 1$ বা $-2 \leq 2sinx \leq 2$
$\therefore$ রেঞ্জ $f = \{y \in R | -2 \leq y \leq 2\}$

(vi) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 6}$
x সংজ্ঞায়িত হবে যদি এবং কেবল যদি $x^2 + 5x + 6 \geq 0$
বা, $(x + 3)(x + 2) \geq 0$ হয়
শর্তটি সিদ্ধ হবে যদি $(x + 3)$ এবং $(x + 2)$ উভয়েই ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হয়।
অর্থাৎ $(x + 3) \geq 0$ এবং $(x + 2) \geq 0$
বা, $x \geq -3$ এবং $x \geq -2$
আবার, $(x + 3) \leq 0$ এবং $(x + 2) \leq 0$
বা, $x \leq -3$ এবং $x \leq -2$
ডোমেন $f = \{x \in R | x \geq -2$ অথবা $x \leq -3\}$
ডোমেনের মান বসালে $f(x)$ এর মান 0 বা তার থেকে বড় যে কোনো বাস্তব সংখ্যা পাওয়া যায়,

রেঞ্জ $f = \{y \in R | y \geq 0\}$

উদাহরণ 5: $X = \{6,7\}, Y = \{3,8\}$এবং $R = \{(x,y) | x \in X, y \in Y$ এবং $x > y\}$ হলে R অন্বয়টি নির্ণয় করুন। R এবং R^{-1} উভয় অন্বয়ের ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $R = \{(6,3), (7,3)\}$

ডোমেন $R = \{6,7\}$

রেঞ্জ $R = \{3\}$

ডোমেন $R^{-1} = \{3\}$

রেঞ্জ $R^{-1} = \{6,7\}$

উদাহরণ 6: $f(x) = \frac{2x-9}{2x+3}$ হলে $f(3)$ এবং $f\left(\frac{1}{2}\right)$ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $f(3) = \frac{2\times3-9}{2\times3+3} = \frac{6-9}{6+3} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$

এবং $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\times\frac{1}{2}-9}{2\times\frac{1}{2}+3} = \frac{1-9}{1+3} = \frac{-8}{4} = -2$

উদাহরণ 7: $f: R \to R$ এবং $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, x \geq 2 \\ x + 2, x < 2 \end{cases}$ হলে $f(5), f(1), f(-2)$ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $x = 5,$ হলে $f(x) = x^2 + 3x \because 5 > 2$

$\therefore f(5) = 5^2 + 3\times5 = 25 + 15 = 40$

$x = 1,$ হলে $f(x) = x + 2 \because 1 < 2$

$\therefore f(1) = 1 + 2 = 3$

$x = -2,$ হলে $f(x) = x + 2 \because -2 < 2$

$\therefore f(-2) = -2 + 2 = 0$

পাঠ ২.২ ফাংশনের প্রকারভেদ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

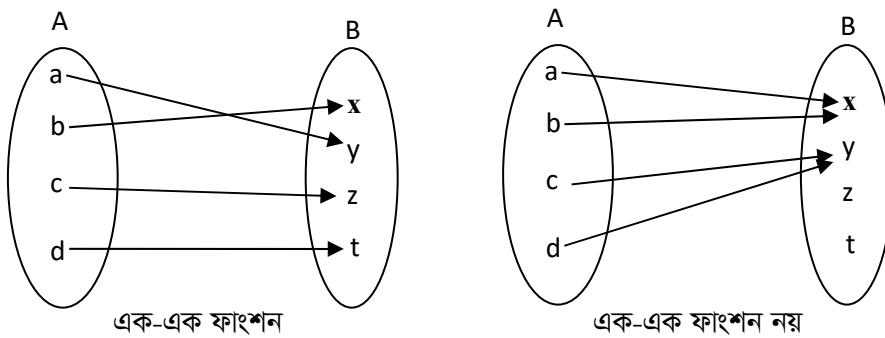
এই পাঠ শেষে আপনি-

- বিভিন্ন প্রকার ফাংশন ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- ফাংশনের ধরন নির্ণয় করতে পারবেন ।

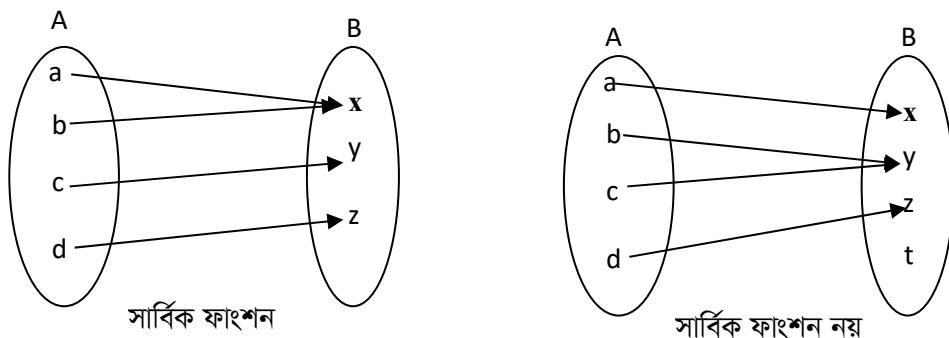
মুখ্য শব্দ	এক-এক ফাংশন, স্যার্বিক ফাংশন, অভেদ ফাংশন, সংযোজিত ফাংশন, ধ্রুবক ফাংশন

মূলপাঠ

এক-এক ফাংশন (One One Function): ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন উপাদানগুলোর জন্য যদি কোডোমেনে ভিন্ন ভিন্ন প্রতিচ্ছবি পাওয়া যায় তাহলে ফাংশনটিকে এক-এক ফাংশন বলা হয়।

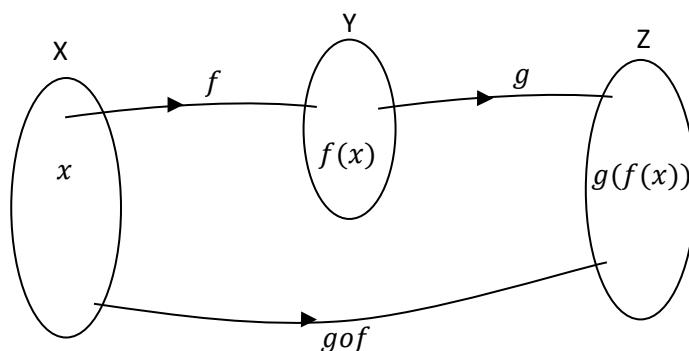
সকল $x_1, x_2 \in$ ডোমেন f এর জন্য $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ হলে ফাংশনটি এক-এক।

উদাহরণ 1: f : R→R, $f(x) = x + 1$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনটি এক-এক কারণ x , এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $f(x)$ এর ভিন্ন ভিন্ন মান পাওয়া যাবে।

উদাহরণ 2: f : R→R , $f(x) = x^2$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশন এক-এক নয় কারণ, $f(2) = 4$ এবং $f(-2) = 4$ এর প্রতিচ্ছবি 4 পাওয়া যাবে।

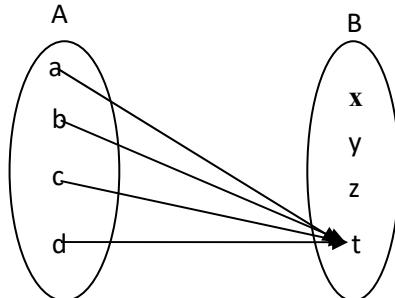
সার্বিক ফাংশন (Universal Function): ফাংশনের সবগুলি উপাদান সম্পর্কে অংশগ্রহণ করলে তাকে সার্বিক ফাংশন বলে। অর্থাৎ ফাংশনের রেঞ্জ যদি কো-ডোমেন হয় তাকে সার্বিক সেট বলে।

উদাহরণ 3: $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,3,4,5,7\}$ $f: A \to B$ এবং $f(x) = x + 1$ একটি সার্বিক ফাংশন

উদাহরণ 4: $f: R \to R$ এবং $f(x) = x^2$ ইহা সার্বিক নয় । কারণ এক্ষেত্রে রেঞ্জ কোডোমেন এর সমান নয়।

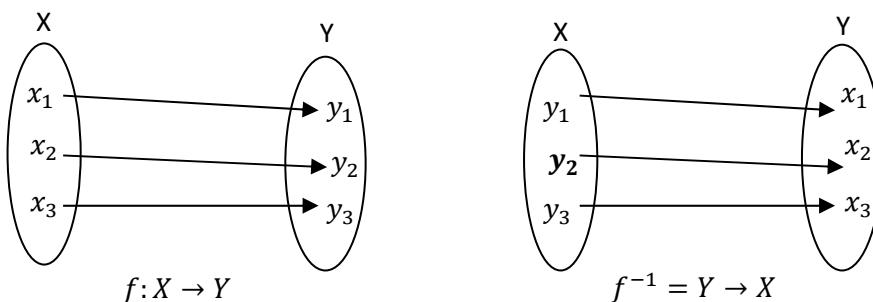
সংযোজিত ফাংশন (Composite Function):

মনে করুন, $f: X \to Y$ এবং $g: Y \to Z$ দুটি ফাংশন। gof দ্বারা ফাংশন দুটির সংযোজিত (Composite) ফাংশন বুঝায় যেখানে f প্রথমে কাজ করে এবং তারপর g কাজ করে।

উদাহরণ 5: $f(x) = 2x + 1$ এবং $g(x) = x^2 + 2$ হলে
অর্থাৎ $(gof)(x) = g(f(x))$, অনুরূপ ভাবে $(fog)(x) = f(g(x))$.
(i) $(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = (2x+1)^2 + 2 = 4x^2 + 4x + 1 + 2 = 4x^2 + 4x + 3$
(ii) $(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2+2) = 2(x^2+2) + 1 = 2x^2 + 4 + 1 = 2x^2 + 5$
(iii) $(fof)(x) = f(f(x)) = f(2x+1) = 2(2x+1) + 1 = 4x + 2 + 1 = 4x + 3$

অভেদ ফাংশন (Identity function): $f: A \to B$ ফাংশনটিকে অভেদ ফাংশন বলা হয় যদি সকল $x \in A$ এর জন্য $f(x) = x$ হয়।
উদাহরণ 6: $f: R \to R$ এবং $f(x) = x$ একটি অভেদ ফাংশন

ধ্রুবক ফাংশন : $f: A \to B$ ফাংশনটিকে ধ্রুবক ফাংশন বলা হয় যদি সকল $x \in A$ এর জন্য $f(x) = k, k \in B$ হয়।
উদাহরণ 7: $f: R \to R, f(x) = 2$ একটি ধ্রুবক ফাংশন।
উদাহরণ 8:

বিপরীত ফাংশন: $f: X \to Y$ দ্বারা সূচিত ফাংশন এক-এক এবং সার্বিক হলে f এর বিপরীত ফাংশন f^{-1} কে $f^{-1} = Y \to X$ দ্বারা সূচিত করা হয়, যেখানে সকল $y \in Y$ এর জন্য একটি অনন্য $f^{-1}(y) = x \in X$ বিদ্যমান থাকে।

$f: X \to Y$

$f^{-1} = Y \to X$

অনুসিদ্ধান্ত : $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$

উদাহরণ 9: f : R→R ফাংশনটি $f(x) = 2x - 3$ দ্বারা বর্ণিত হলে দেখান যে , ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক। $f^{-1}(x)$ নির্ণয় করুন।
সমাধান: যেকোন $x_1, x_2 \in R$ এর জন্য
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \Rightarrow x_1 = x_2$
∴ ফাংশনটি এক-এক।
মনে করুন, $f(x) = y$
বা, $2x - 3 = y$
বা, $2x = y + 3$

$\therefore\ x = \dfrac{y+3}{2} \therefore f^{-1}(y) = \dfrac{y+3}{2} \ldots\ldots (i)$

ফাংশনটির রেঞ্জ= R , যে কোন বাস্তব সংখ্যা

রেঞ্জের যে কোন y এর জন্য ডোমেনে সংশ্লিষ্ট মান পাওয়া যায় যার প্রতিচ্ছবি y ।

$\therefore$ ফাংশনটি সার্বিক

সেহেতু ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক ।

$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$ [(i) নং এর উভয় পক্ষে y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই]

উদাহরণ 10: $A : R\text{-}\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ এবং $B : R\text{-}\left\{\frac{1}{2}\right\}$ এবং $f: A \to B, f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$ দ্বারা বর্ণিত হলে দেখান যে,ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক, $f^{-1}(x)$ নির্ণয় করুন ।

সমাধান : যেকোন $x_1, x_2 \in R$ ডোমেন f এর জন্য

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1-3}{2x_1+1} = \frac{x_2-3}{2x_2+1}$

$\Rightarrow (x_2-3)(2x_1+1) = (x_1-3)(2x_2+1)$

$\Rightarrow 2x_1x_2 + x_2 - 6x_1 - 3 = 2x_1x_2 + x_1 - 6x_2 - 3$

$\Rightarrow x_2 - 6x_1 = x_1 - 6x_2$

$\Rightarrow -x_1 - 6x_1 = -6x_2 - x_2$

$\Rightarrow -7x_1 = -7x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$ ফাংশনটি এক-এক ।

মনে করুন, $f(x) = y$

বা, $\frac{x-3}{2x+1} = y$

বা, $x - 3 = y(2x+1) = 2xy + y$

বা, $x - 2xy = y + 3$

বা, $x(1-2y) = y + 3$

বা, $x = \frac{y+3}{1-2y}$ $\therefore f^{-1}(y) = \frac{y+3}{1-2y}$ এবং $\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+3}{1-2x}$

$\therefore\ x = \dfrac{y+3}{2}$ $\therefore f^{-1}(y) = \dfrac{y+3}{2} \ldots\ldots (i)$

এখানে $y = \frac{1}{2} \notin B$ অর্থাৎ $y = \frac{1}{2}$ রেঞ্জের কোন উপাদান নয় । এই মানটি ছাড়া যে কোন y এর জন্য ডোমেন সংশ্লিষ্ট একটি মান আছে যার প্রতিচ্ছবি y ।

$\therefore$ ফাংশনটি সার্বিক

সেহেতু ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক ।

$f^{-1}(1) = \frac{1+3}{1-2\times1} = \frac{4}{-1} = -4$

উদাহরণ 11: $f(x) = x^2 + 3x + 1$ এবং $g(x) = 2x - 3$ হলে $(fog)(x)$ নির্ণয় করুন, $(gof)(2)$ এবং $(fog)(2)$ এর মান নির্ণয় করুন ।

সমাধান: $(fog)(x) = f(g(x)) = f(2x-3)$

$= (2x-3)^2 + 3(2x-3) + 1 = 4x^2 - 12x + 9 + 6x - 9 + 1 = 4x^2 - 6x + 1$

$(gof)(x) = g(f(x))$

$= g(x^2+3x+1) = 2(x^2+3x+1) - 3 = 2x^2 + 6x + 2 - 3 = 2x^2 + 6x - 1$

$(gof)(2) = 2.2^2 + 6.2 - 1 = 8 + 12 - 1 = 19$

$(fog)(2) = 4.2^2 - 6.2 + 1 = 16 - 12 + 1 = 5$

পাঠ ২.৩ ফাংশনের স্কেচ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- দ্বিঘাত ফাংশনের স্কেচ করতে পারবেন,
- ফাংশনের স্কেচের বৈশিষ্ট লিখতে পারবেন,
- পরমমান ফাংশনের স্কেচ করতে পারবেন,
- লগারিদমিক ফাংশনের স্কেচ করতে পারবেন,
- ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের স্কেচ করতে পারবেন ।

মুখ্য শব্দ	অক্ষ, স্কেচ, সূচকীয় ফাংশন, লগারিদমিক ফাংশন

মূলপাঠ

ফাংশনের স্কেচ: স্কেচ শব্দের আভিধানিক অর্থ খসড়া চিত্র। আনুমানিক স্কেল ও পরিমাপ ভিত্তিক চিত্রকে স্কেচ বলে। ব্যবহারিক জীবনে কোন ফাংশনের স্কেচ অংকন করে ফাংশনের আকৃতি সম্পর্কে ধারণা করা যায়।

স্কেচ অংকনের সময় কতগুলি বিষয়ের প্রতি লক্ষ্য রাখা দরকার। যেমন:

(i) ফাংশনটির অক্ষ মূলবিন্দুর সাপেক্ষে প্রতিসম কিনা।

(ii) ফাংশনটি মূলবিন্দুগামী কিনা।

(iii) ফাংশনটি অক্ষদ্বয়কে ছেদ করে কিনা।

(iv) ফাংশনের স্বাধীন চলকের ডোমেন এবং ডোমেনের অন্তর্গত মানের জন্য ফাংশনের রেঞ্জ।

দ্বিঘাত ফাংশন : দ্বিঘাত ফাংশনের সাধারণ আকার $y = f(x) = ax^2 + bx + c; a, b, c \in R$ এবং $a \neq 0$

লেখের বৈশিষ্ট:

(i) এই ধরনের দ্বিঘাত ফাংশনের লেখ একটি পরাবৃত্ত।

(ii) y অক্ষ বা y অক্ষের সমান্তরাল রেখার সাপেক্ষে লেখচিত্রটি প্রতিসম হয়।

(iii) লেখচিত্রটি উত্তল চিত্র হবে , যদি $a < 0$ এবং অবতল চিত্র হবে, যদি $a > 0$ হয়।

(iv) লেখচিত্রটি অক্ষকে স্পর্শ বা ছেদ করলে এর বাস্তব মূল থাকবে অন্যথায় এর কোন বাস্তব মূল থাকবে না।

নিম্নে দ্বিঘাত ফাংশনের লেখচিত্র অংকনের একটি নিয়ম বর্ণনা করা হলো:

(i) প্রথমে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন এবং $\frac{dy}{dx} = 0$ ধরে x এর মান নির্ণয় করে সংশ্লিষ্ট বিন্দুটি নির্ণয় করতে হবে।

(ii) এই বিন্দুটিতে ফাংশনটি দিক পরিবর্তন করবে অর্থাৎ বাঁক নিবে।

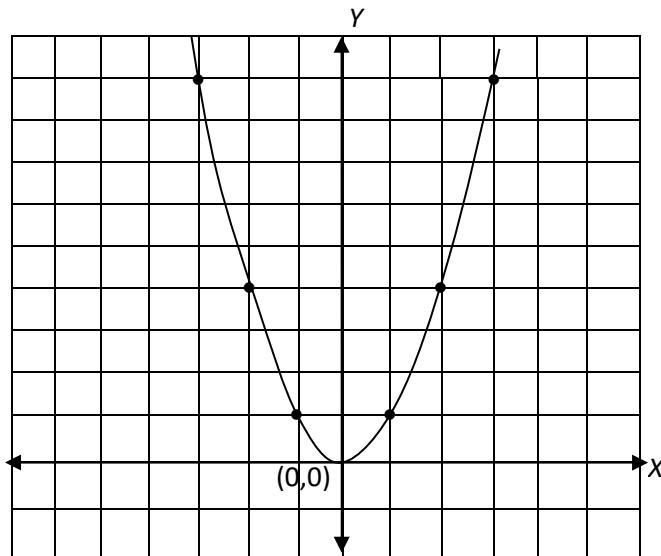
(iii) শর্ত (i) হতে প্রাপ্ত x এর মানের নিকটবর্তী এর আরও কিছু মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করতে হবে এবং সংশ্লিষ্ট বিন্দু নির্ণয় করতে হবে।

অতপর $\cup$ অথবা $\cap$ আকৃতির স্কেচ অংকন করতে হবে।

উদাহরণ 1: $y = x^2$ এর স্কেচ অংকন করুন।

সমাধান: $\frac{dy}{dx} = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

x	0	1	−1	2	−2	3	−3
y	0	1	1	4	4	9	9

$y = x^2$ বক্ররেখাটি $(0,0)$ বিন্দুতে বাঁক নিবে। বক্ররেখাটি $(0,0), (1,1), (-1,1), (2,4), (-2,4),$ $(3,9), (-3,9)$ বিন্দু গামী। বিন্দুগুলো আপাতভাবে যোগ করলেই লেখচিত্রটি অংকিত হয়।

বৈশিষ্ট্য:

(i) মূলবিন্দু x অক্ষকে স্পর্শ করে

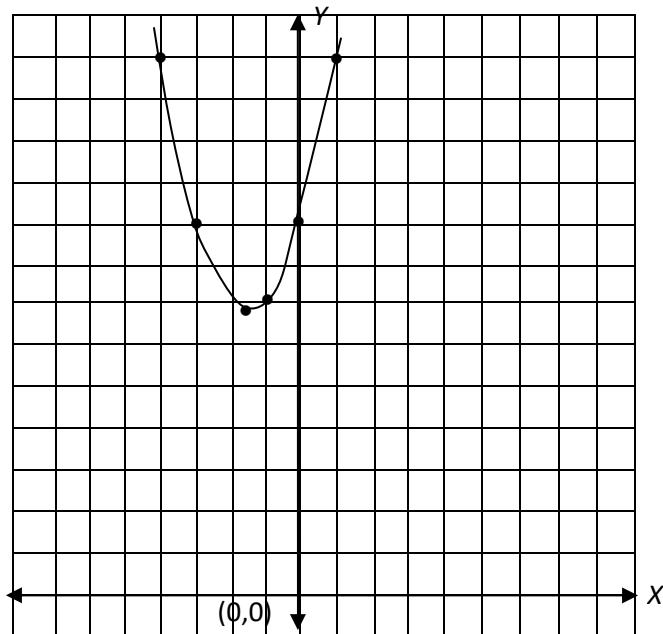
(ii) x এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যেদিকে বৃদ্ধি পাক y এর মান ধনাত্মক এবং বৃদ্ধি পাবে।

উদাহরণ 2: $y = x^2 + 3x + 9$ ফাংশনের স্কেচ অংকন করুন।

সমাধান: $\frac{dy}{dx} = 2x + 3 = 0 \Rightarrow 2x = -3 \therefore x = \frac{-3}{2}$ বিন্দুতে বক্ররেখাটি বাঁক নিবে।

x	$\frac{-3}{2}$	0	1	−1	−3	−4
y	$\frac{27}{4}$	9	13	7	9	13

$\therefore$

ফাংশনের স্কেচের বৈশিষ্ট্য:

(i) ফাংশনের স্কেচটি $x = -\frac{3}{2}$ সরলরেখা সাপেক্ষে প্রতিসম।

(ii) স্কেচটি অবিচ্ছিন্ন।

(iii) স্কেচটি $y = \frac{27}{4}$ সরলরেখার নিচে যাবে না।

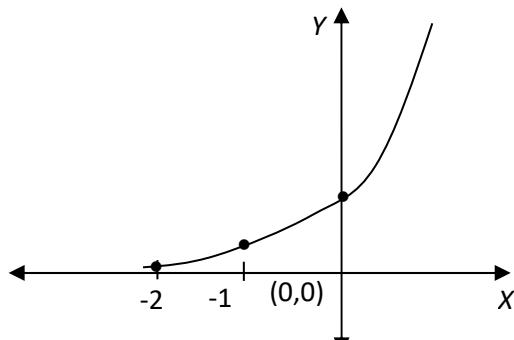
সূচক ফাংশন : সূচক ফাংশনের সাধারণ আকার $y = f(x) = a^x, a \neq 0$ লেখচিত্র গুলি $(0,1)$, বিন্দুগামী হবে। x অক্ষ লেখচিত্র গুলির অসীমতট হবে অর্থাৎ লেখচিত্র কখনই x অক্ষকে স্পর্শ করবে না। অন্য কথায় x অক্ষকে অসীমে স্পর্শ করবে।

উদাহরণ 3: $y = 5^x$ এর স্কেচ অংকন করুন।

সমাধান:

x	0	1	2	-1	-2
y	1	5	25	0.2	0.04

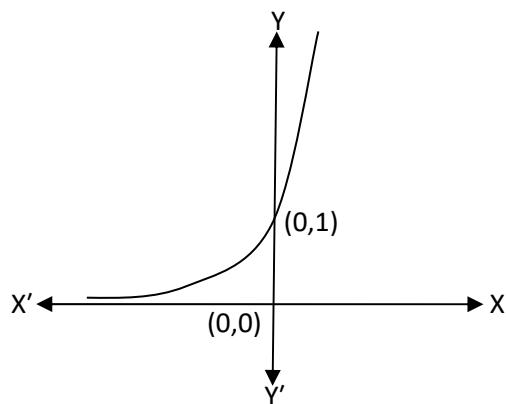
বৈশিষ্ট্য:

(a) স্কেচটি অবিচ্ছিন্ন।

(b) স্কেচটি অক্ষকে স্পর্শ করেনা বা অক্ষের নীচে যায় না।

উদাহরণ 4: $y = 10^x$ এর লেখচিত্র অংকন করুন।

সমাধান:

x	0	1	2	-1	-2
y	1	10	100	0.1	0.01

$\therefore$ বক্ররেখাটি $(0,1), (1,10), (2,100), (-1,0.1), (-2,0.01)$ ইত্যাদি বিন্দুগামী

ফাংশনের স্কেচের বৈশিষ্ট্য:

(a) ফাংশনের y অক্ষকে $(0,1)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(b) স্কেচটি অবিচ্ছিন্ন।

(c) ধনাত্মক x অক্ষকে অসীমে স্পর্শ করে।

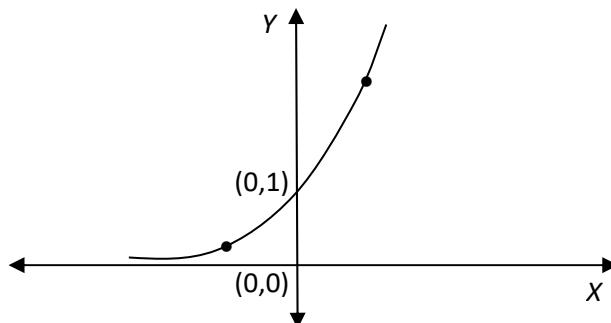
(d) x এর মান বৃদ্ধির জন্য y এর মান দ্রুত বৃদ্ধি পায়।

উদাহরণ 5: $y = e^x$ এর লেখচিত্র অংকন করুন।

সমাধান:

x	0	1	2	-1	-2	……	∞	$-\infty$
y	1	e			$\frac{1}{e^2}$	……	∞	0

$\therefore$ বক্ররেখাটি $(0,1), (1,e), (2,e^2), \left(-1,\frac{1}{e}\right), \left(-2,\frac{1}{e^2}\right)$ ইত্যাদি বিন্দুগামী

ফাংশনের স্কেচের বৈশিষ্ট্য:

(a) ফাংশনের y অক্ষকে $(0,1)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(b) ঋণাত্মক x অক্ষকে অসীমে স্পর্শ করে।

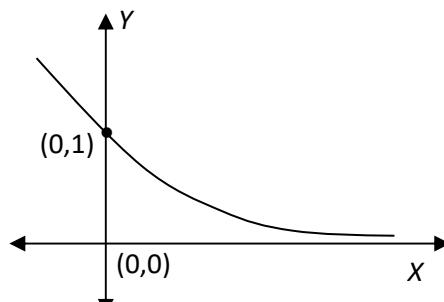
(d) x এর মান বৃদ্ধির সাথে y এর মান দ্রুত বৃদ্ধি পায়।

উদাহরণ 6: $y = e^{-x}$ এর লেখচিত্র অংকন করুন।

সমাধান:

x	0	-1	-2	1	2	……	∞	$-\infty$
y	1	e	e^2	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e^2}$	……	0	∞

$\therefore$ বক্ররেখাটি $(0,1), (-1,e), (-2,e^2), \left(1,\frac{1}{e}\right), \left(2,\frac{1}{e^2}\right)$ ইত্যাদি বিন্দুগামী

ফাংশনের স্কেচের বৈশিষ্ট্য:

(a) ফাংশনের y অক্ষকে $(0,1)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

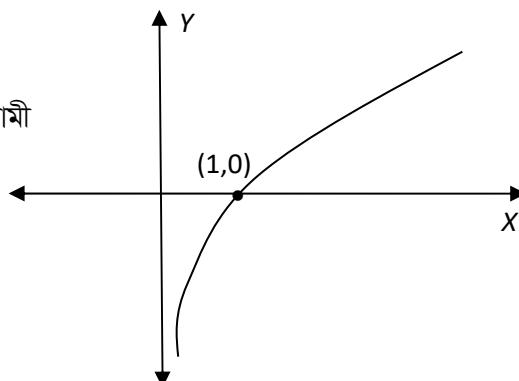
(b) ধনাত্মক x অক্ষকে অসীমে স্পর্শ করে।

(c) x এর মান বৃদ্ধির সাথে y এর মান দ্রুত কমতে থাকে।

লগারিদমিক ফাংশন: $y = f(x) = log_a x, x > 0$ লগারিদমিক ফাংশন সম্ভাব্য কিছু লেখচিত্র নিচে দেওয়া হলো।
লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য :
(i) লেখচিত্রটি x অক্ষকে $(1,0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
(ii) যখন $x \rightarrow 0$হয়, তখন $\rightarrow -\infty$ হয়।
(iii) যখন $x \rightarrow \infty$ হয়, তখন $y \rightarrow \infty$ হয়।
(iv) y অক্ষকে লেখচিত্রটি অসীমে স্পর্শ করে।

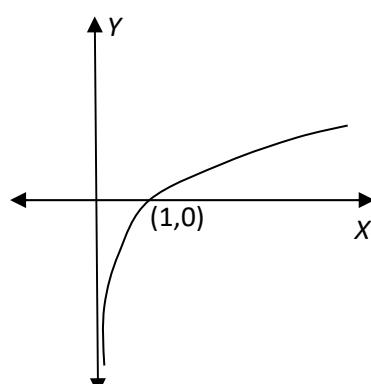
উদাহরণ 7: $y = log_{10} x$, এর স্কেচ অংকন করুন।
সমাধান:

x	1	∞	∞
y	0	0	∞

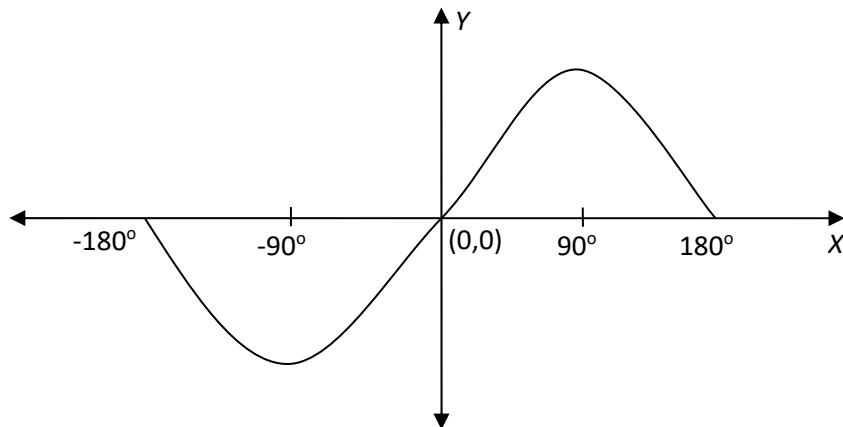
$\therefore$ বক্ররেখাটি $(1,0), (\infty, 0)(\infty, \infty)$ ইত্যাদি বিন্দুগামী

ফাংশনের স্কেচের বৈশিষ্ট্য:
(a) লেখচিত্রটি x অক্ষকে $(1,0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
(b) ঋণাত্মক y অক্ষকে অসীমে স্পর্শ করে ।
(c) x এর মান বৃদ্ধির জন্য y এর মান বৃদ্ধি পায়।

উদাহরণ 8: $y = lnx$ এর স্কেচ অংকন করুন।
সমাধান:

x	1	0	∞
y	0	$-\infty$	∞

$\therefore$ বক্ররেখাটি $(1,0), (0, -\infty)(\infty, \infty)$ ইত্যাদি বিন্দুগামী

ফাংশনের স্কেচের বৈশিষ্ট:
(a) লেখচিত্রটি x অক্ষকে $(1,0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
(b) ঋণাত্মক y অক্ষকে অসীমে স্পর্শ করে ।
(c) x এর মান বৃদ্ধির জন্য y এর মান বৃদ্ধি পায়।

ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের কিছু উদাহরণ দেওয়া হলো:
উদাহরণ 9: $y = \sin x$ এর স্কেচ অংকন করুন $(-180° \leq x \leq 180°)$।
সমাধান:

x	$-180°$	$-90°$	$0°$	$90°$	$180°$
$y = \sin x$	0	-1	0	1	0

বৈশিষ্ট্য:

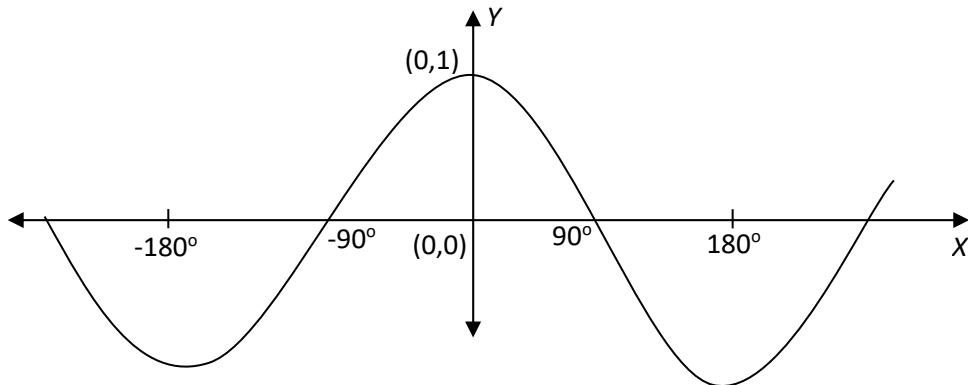
(i) বক্ররেখাটি অবিচ্ছিন্ন।

(ii) y অক্ষকে $(0,0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(iii) লেখচিত্রের সর্বোচ্চ মান 1 এবং সর্বোনিম্ন মান -1।

উদাহরণ 10: $y = \cos x$ এর স্কেচ অংকন করুন $(-180° \leq x \leq 180°)$।

সমাধান:

x	$-180°$	$-90°$	$0°$	$90°$	$180°$
$y = \cos x$	-1	0	1	0	-1

বৈশিষ্ট্য:

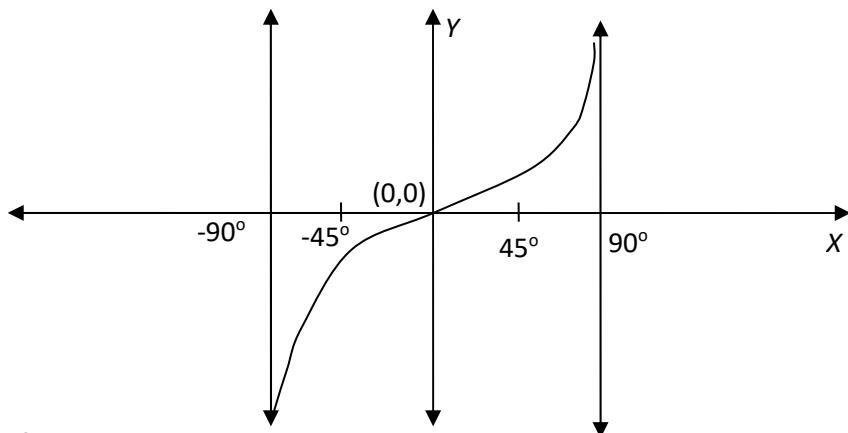
(i) বক্ররেখাটি অবিচ্ছিন্ন।

(ii) y অক্ষকে $(0,1)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(iii) লেখচিত্রের সর্বোচ্চ মান 1 এবং সর্বোনিম্ন মান -1।

উদাহরণ 11: $y = \cot x$ এর স্কেচ অংকন করুন (যেখানে, $-90° \leq x \leq 90°$)।

সমাধান:

x	$-90°$	$-45°$	$0°$	$45°$	$90°$
$y = \cot x$	$-\infty$	-1	0	1	∞

বৈশিষ্ট্য:

(i) লেখচিত্রটি মূল বিন্দুগামী।

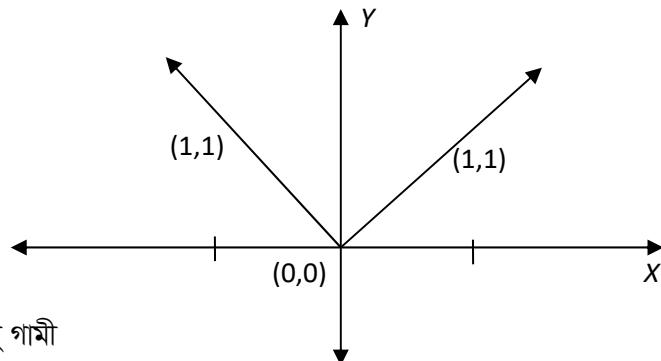
(ii) y অক্ষের সমান্তরাল $x = 90°$ রেখাকে অসীমে স্পর্শ করে।

(iii) y অক্ষের সমান্তরাল $x = -90°$ রেখাকে অসীমে স্পর্শ করে।

পরমমান ফাংশন: পরমমান ফাংশনের সাধারণ আকার $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x); f(x) \geq 0 \\ -f(x); f(x) < 0 \end{cases}$

উদাহরণ 12: $y = |x|$ এর স্কেচ অংকন করুন।

সমাধান: $y = |x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ x, x < 0 \end{cases}$

x	0	1	-1
y	0	1	1

বৈশিষ্ট্য:

(i) লেখচিত্রটি (0,0) বিন্দু গামী অর্থাৎ মূলবিন্দু গামী

(ii) দুইটি সরলরেখা পাওয়া যায়।

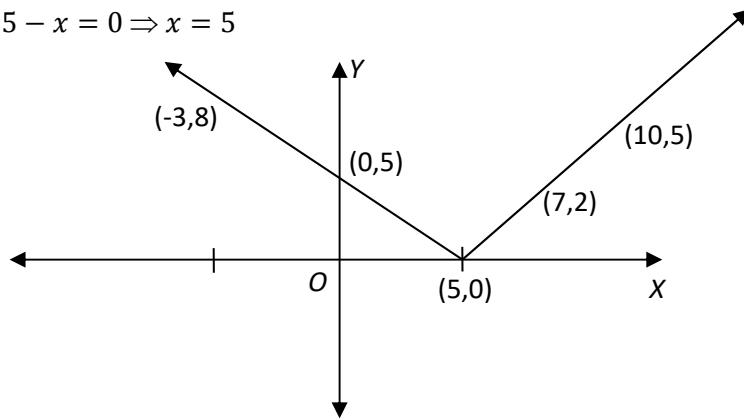
(iii) x -অক্ষের নিচে রেখাটির অস্তিত্ব নেই।

উদাহরণ 13: $y = |5 - x|$ এর লেখচিত্র অংকন করুন।

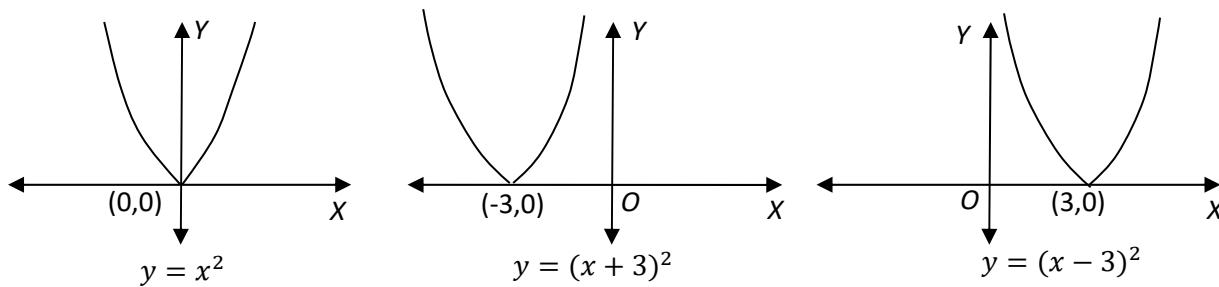
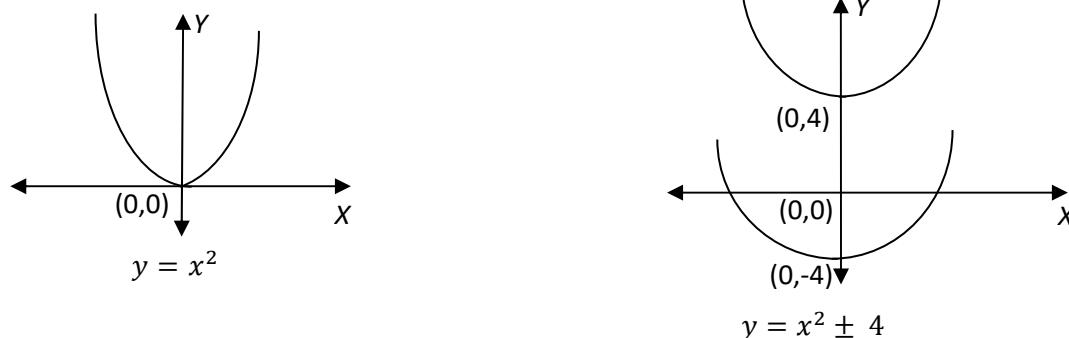
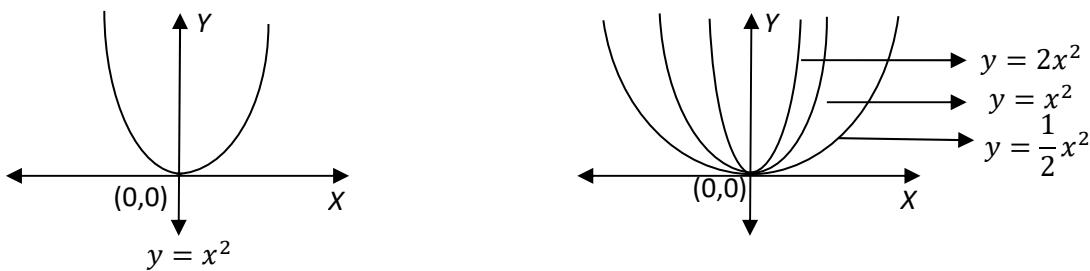
সমাধান: $y = |5 - x| = \begin{cases} 5 - x, x \leq 5 \\ x - 5, x > 5 \end{cases}$

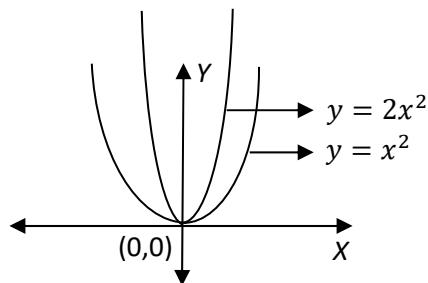
$x = 0$ হলে $y = 5$, আবার $y = 0 \Rightarrow 5 - x = 0 \Rightarrow x = 5$

$\therefore$ লেখচিত্রটি (0,5) বিন্দু গামী।

x	-3	0	5	7	10
y	8	5	0	2	5

বৈশিষ্ট্য:
(i) লেখচিত্রটি x অক্ষকে $(5,0)$ বিন্দুতে ছেদ করেছে।
(ii) x - অক্ষের নিচে লেখচিত্রটির কোন অস্তিত্ব নেই।
(iii) দুইটি সরল রেখা পাওয়া গিয়েছে।

রূপান্তরিত ফাংশন এবং ফাংশনের স্কেচ : কোন ফাংশন $y = f(x)$ কে নিম্নলিখিত চার প্রকারে রূপান্তর করা যায়:
(i) $f(x+h)$এর লেখচিত্রটি পেতে হলে $f(x)$ এর লেখচিত্রটি x অক্ষ বরাবর $-h$ পরিমাণ সরে যাবে।
(ii) $f(x)+h$ এর লেখচিত্রটি পেতে হলে $f(x)$ এর লেখচিত্রটি y অক্ষ বরাবর h পরিমাণ সরে যাবে।
(iii) $f(hx)$ এর লেখচিত্রটি পেতে হলে $f(x)$ এর লেখচিত্রটি x অক্ষ বরাবর $\frac{1}{h}$ গুণ প্রসারিত বা সংকোচিত হবে।
(iv) $hf(x)$ এর লেখচিত্রটি পেতে হলে $f(x)$ এর লেখচিত্রটি y অক্ষ বরাবর h গুণ প্রসারিত বা সংকোচিত হবে।

উদাহরণ 14: $y = x^2$ এর রূপান্তরিত ফাংশন $y = (x+3)^2$, $y = (x-3)^2$ ফাংশন যথাক্রমে x অক্ষ বরাবর 3 একক বামে (x অক্ষের ঋণাত্মক দিকে), 3 একক ডানে (x অক্ষের ধনাত্মক দিকে) স্থানান্তরিত হয়।

উদাহরণ 15: $y = x^2$ এর রূপান্তরিত ফাংশন $y = x^2 + 4$ ও $y = x^2 - 4$ যথাক্রমে 4 একক উপরে ও 4 নিচে স্থানান্তরিত হয়।

উদাহরণ 16: $y = x^2$ এর রূপান্তরিত ফাংশন $y = \frac{1}{2}x^2$ এবং $y = 2x^2$ যথাক্রমে y অক্ষ হতে সম্প্রসারিত ও y অক্ষ হতে সংকোচিত।

উদাহরণ 17: $y = x^2$ এর রূপান্তরিত ফাংশন $y = 2f(x) = 2x^2$।

x	0	± 1	± 2	± 3
$y = x^2$	0	1	4	9
$y = 2x^2$	0	2	8	18

পাঠ ২.৪ ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের পর্যায়

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- $\sin x$ ফাংশনের এর পর্যায় নির্ণয় করতে পারবেন,
- $\cos x$ ফাংশনের এর পর্যায় নির্ণয় করতে পারবেন,
- $\tan x$ ফাংশনের এর পর্যায় নির্ণয় করতে পারবেন ।

মুখ্য শব্দ	ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের পর্যায়

মূলপাঠ

ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের পর্যায়ঃ কোন ফাংশন $f(x)$ যদি এরূপভাবে বিদ্যমান থাকে যেন,

$f(x) = f(x+a) = f(2a+x)$, তাহলে ফাংশনটির পর্যায় a (সর্বনিম্ন মান) হবে।
ত্রিকোণমিতিক ফাংশনগুলোর পর্যায় ফাংশন।
দেখা যায়,
$\sin(2\pi + x) = \sin(4\pi + x) = \sin(6\pi + x) = \cdots = \sin x$
$\cos(2\pi + x) = \cos(4\pi + x) = \cos(6\pi + x) = \cdots = \cos x$
$\text{cosec}(2\pi + x) = \text{cosec}(4\pi + x) = \text{cosec}(6\pi + x) = \cdots = \text{cosec}x$
$\sec(2\pi + x) = \sec(4\pi + x) = \sec(6\pi + x) = \cdots = \sec x$
$\tan(\pi + x) = \tan(2\pi + x) = \tan(3\pi + x) = \cdots = \tan x$
$\cot(\pi + x) = \cot(2\pi + x) = \cot(3\pi + x) = \cdots = \cot x$
$\sin x,\ \cos x,\ \text{cosec}x,\ \sec x$ এর পর্যায় 2π
$\tan x,\ \cot x$ এর পর্যায় π

উদাহরণ 1: $\cos 3x,\ \sin 2x$ এর পর্যায় নির্ণয় করুন।
সমাধানঃ $\cos 3x = \cos(2\pi + 3x) = \cos(4\pi + 3x)$
$= \cos 3\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) = \cos 3(\frac{4\pi}{3} + x) = \cos 3\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) = \cos 3(2.\frac{2\pi}{3} + x)$

$\therefore \cos 3x$ এর পর্যায় $\frac{2\pi}{3}$ বা $120°$

এবার, $\sin(2\pi + 2x) = \sin(4\pi + 2x)$

$\sin 2(\pi + x) = \sin 2(2\pi + x)$

$\sin 2x$ এর পর্যায় π বা $180°$

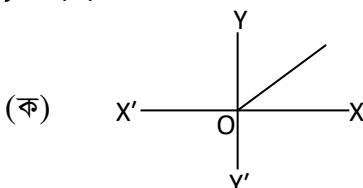
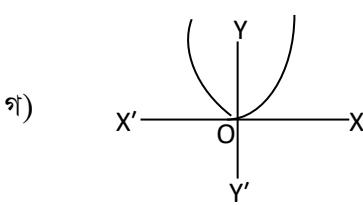
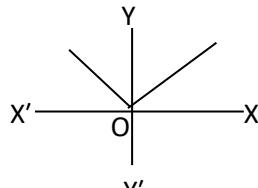
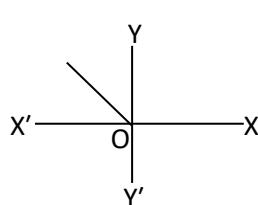
পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.৪

1. $f(x) = \frac{x}{1-2x}$ এর বিপরীত ফাংশন কোনটি?
   (ক) $g(x)=\frac{1-2x}{x}$ (খ) $g(x)=\frac{1+2x}{x}$ (গ) $g(x)=\frac{x}{1-2x}$ (ঘ) $g(x)=\frac{x}{1+2x}$
2. যদি $f: X \to X$ এবং $f(x) = \frac{1}{x}$ যেখানে x হলো অশূন্য বাস্তব সংখ্যা তাহলে $f(x)$ কোনটি?
   (ক) এক-এক (খ) সার্বিক (গ) এক-এক নয় (ঘ) সার্বিক নয়
3. $f: R \to R$ এবং $f(x) = x^2 + 1$ হলে $f^{-1}(17)$ এর মান নিচের কোনটি?
   (ক) $\{4, -4\}$ (খ) $\{-3, 3\}$ (গ) $\emptyset$ (ঘ) $\{4, -5\}$
4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ এবং $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ হলে, $(fog)(x)$ এর মান নিচের কোনটি?
   (ক) 1 (খ) 0 (গ) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (ঘ) $\sqrt{1+x^2}$
5. $f: R \to R$ এবং $f(x) = 5x - 3$ হলে $f^{-1}(3)$ এর মান নিচের কোনটি?
   (ক) 10 (খ) -10 (গ) $\frac{6}{5}$ (ঘ) $\frac{5}{6}$
6. $f(x) = \sqrt{x}$ ফাংশনটির ডোমেন কত?
   (ক) $[0, \infty)$ (খ) $(0, -2]$ গ) $[0, -2]$ (ঘ) (∞, ∞)
7. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ হলে $f(x)$ এর ডোমেন কোনটি?
   (ক) $[2,3]$ (খ) $[-3, -2]$ গ) $R - [-3, -2]$ (ঘ) $R - [2,3]$

   যদি $f: X \to X$ এবং $f(x) = \frac{1}{x}$ হলে (8 ও 9) নং প্রশ্নের উত্তর দিন –
8. $f(x)$ ফাংশনটির ডোমেন কত?
   (ক) R (খ) $R - \{1\}$ গ) $R - \{-1\}$ (ঘ) $R - \{0\}$
9. $f(x)$ ফাংশনটির রেঞ্জ কত?
   (ক)) $R - \{0\}$ (খ) $R - \{1\}$ গ) $R - \{-1\}$ (ঘ) R
10. $f(x) = sin^{-1}x$ ফাংশনটির ডোমেন কত?
    (ক)) $(-\infty, \infty)$ (খ) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (গ) $[-1,1]$ (ঘ) R
11. $y = |x|$ এর লেখচিত্র কোনটি?

(ক)

(খ)

গ)

(ঘ)

12. $f(x) = \frac{5x+3}{4x-5}$ হলে $f^{-1}(x)$এর মান কোনটি?

(ক) $\frac{4x-3}{5x+4}$ (খ) $\frac{4x-5}{5x+3}$ (গ) $\frac{5x-3}{4x+5}$ (ঘ) $\frac{5x+3}{4x-5}$

13. (i) $f(x)=\frac{2x-9}{x+1}$ হলে f(4), $f\left(\frac{1}{2}\right), f(0)$ নির্ণয় করুন।

(ii) $A=\{-2,-1,0,1,3\}$ এবং $f(x)=x^2+x+1$ দ্বারা ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হলে ফাংশনটির রেঞ্জ নির্নয় করুন।

$(iii) S=\{-2,5\}$ এবং $f: S \to R$ ফাংশনটি $f(x)=2x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। $f(2), f(6)$ এবং $f(S-3)$ নির্ণয় করুন।

14. নিম্নরূপ ভাবে বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় করুন।

(i) $f(x)=3x+5$ (ii) $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$ (iii) $f(x)=\frac{x-3}{2x+1}$ (iv) $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$

(v) $f(x)=\sqrt{x+3}$

15. $f(x)=\begin{cases} 3x-1, x>3 \\ x^2-2, -2 \le x \le 3 \\ 2x+3, x<-2 \end{cases}$ হলে $f(2), f(4), f(-1)$ এবং $f(-2)$ নির্ণয় করুন।

16. $f: R \to R$, $f(x)=x^3+4$ হলে দেখান যে, ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক। $f^{-1}(x)$ নির্ণয় করুন।

17. $f: R \to R$ এবং $g: R \to R$ কে যথাক্রমে $f(x)=2x+1$ এবং $g(x)=x^2-2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। $(gof)(2)$ নির্ণয় করুন।

18. $f: R \to R, f(x)=2x-3$ ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক কিনা কারণসহ উল্লেখ করুন। এক-এক এবং সার্বিক হলে এর বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করুন।

সৃজনশীল প্রশ্ন:

19. যদি $f:\{x \in R, x \ge 0\}$ এবং হয়

(ক) এর রেঞ্জ নির্ণয় করুন।

(খ) এর মান নির্ণয় করুন।

(গ) এর লেখচিত্র থেকে এর লেখচিত্র অঙ্কন করুন।

20. $f(x)=-2^x:\{x \in R\}$ একটি সূচকীয় ফাংশন–

(ক) সূচকীয় ফাংশন ও লগারিদমিক ফাংশনের পার্থক্য নির্ণয় করুন।

(খ) $f(x)=-2^x$ ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় করুন।

(গ) $f(x)=-2^x$ এর লেখচিত্র স্কেচ করুন।

পাঠ ২.৫ ব্যবহারিক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বিভিন্ন ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবেন ।
- লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য সম্বন্ধে লিখতে ও ব্যবহারিক প্রয়োগ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	অন্বয়, ফাংশন, ডোমেন, রেঞ্জ

মূলপাঠ

পরমমান ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন

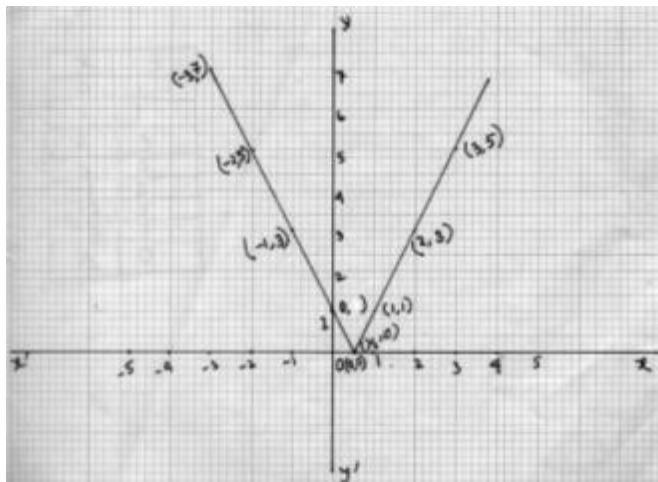
সমস্যা নং-1		তারিখঃ

সমস্যাঃ $y = f(x) = |2x - 1|$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করে তার বৈশিষ্ট্য নির্ণয় করতে হবে।

সমাধানঃ তত্ত্ব (Theory)- $y = |2x - 1|, x \in R$

কার্যপদ্ধতির পর্যায়ক্রমিক ধারাঃ

1. প্রথমে একটি পরিষ্কার ছক কাগজ নিতে হবে। ছক-কাগজের ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রগুলি সুষম হতে হবে। নতুবা লেখচিত্র শুদ্ধ হবে না।
2. ছক কাগজে $x\acute{o}x$ ও $y\acute{o}y$ রেখাদ্বয় অঙ্কন করুন। O কে মূলবিন্দু, $x\acute{o}x$ কে x- অক্ষ ও $y\acute{o}y$- কে y- অক্ষ ধরুন। বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য 2 একক ধরুন।
3. $y = |2x - 1|$ ফাংশনটিতে x- এর বিভিন্ন বাস্তব মান বসিয়ে y- এর অনুরূপ মান নির্ণয় করুন। তা ছকাকারে দেখানো হলো। 2নং শর্তমতে (x, y) বিন্দুগুলি ছক কাগজে বসিয়ে পেন্সিল দ্বারা বিন্দুগুলি যোগ করুন । তাহলে ফাংশনটির লেখচিত্র পাওয়া যাবে।

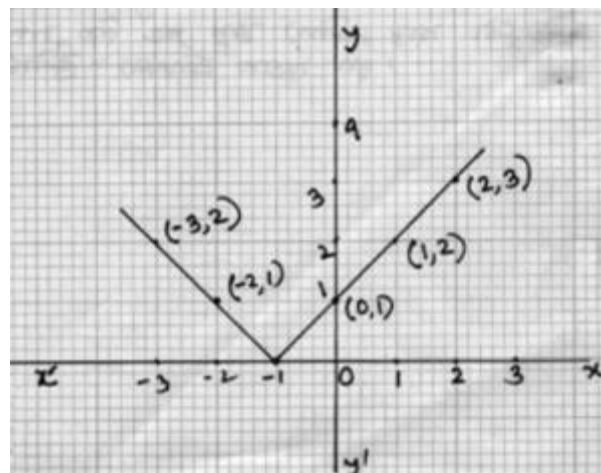
x	0	1	2	3	-1	-2	-3	$\frac{1}{2}$
y	1	1	3	5	3	5	7	0

সমস্যা নং-2		তারিখঃ

সমস্যাঃ $y = f(x) = |x + 1|$ - এর লেখচিত্র অঙ্কন করুন ।

সমাধানঃ তত্ত্ব- $y = |x+1|, x \in R$

কার্যপদ্ধতির পর্যায়ক্রমিক ধাপ

1. প্রথমে একটি ছক কাগজ নিতে হবে। ছক কাগজের ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রগুলি সুষম হতে হবে।
2. ছক কাগজে $x\acute{o}x$ ও $y\acute{o}y$ পরস্পরছেদি দুটি লম্ব রেখা অঙ্কন করুন । O কে মূলবিন্দু, $x\acute{o}x$ কে x অক্ষ ও $y\acute{o}y$ কে y- অক্ষ ধরুন। বর্গক্ষেত্রের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য 0.2 একক ধরুন।
3. $y = |x+1|$ ফাংশনটিতে x- এর বিভিন্ন বাস্তব মানের জন্য y- এর অনুরূপ মান নির্ণয় করুন। তাদেরকে ছকাকারে দেখানো হলো। এখন x ও y -এর মান ছক কাগজে স্থাপন করুন এবং সুক্ষ্ম প্রেন্সিল দ্বারা বিন্দুগুলি যোগ করুন । তাহলে ফাংশনটি লেখচিত্র পাওয়া যাবে।

x	0	–1	–2	–3	1	2
y	1	0	1	2	2	3

বৈশিষ্ট্যঃ

(i) ফাংশনটির ঢাল = 1 বা, –1, অতএব $\tan^{-1}(1) = 45°$ বা $\tan^{-1}(-1) = 135°$.
অর্থাৎ লেখচিত্রটি x- অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যথাক্রমে 45° ও 135° কোণে আণত।

(ii) x- এর সকল বাস্তব মানের জন্য y- এর সর্বদা ধনাত্মক মান পাওয়া যাবে। সুতরাং ফাংশনটির ডোমেন $=R$ এবং রেঞ্জ
$[0,\infty)$।

সমস্যা নং-3		তারিখঃ

সমস্যাঃ $y= f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করুন ।

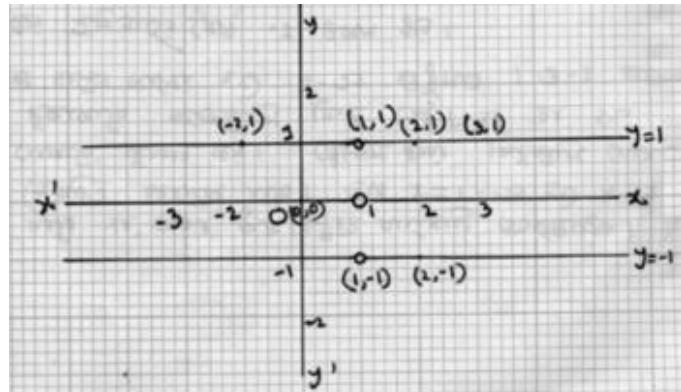
সমাধানঃ তত্ত্ব (Theory)- $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-1}, & x-1>0 \\ \frac{-(x-1)}{x-1}, & x-1<0 \end{cases}$

বা, $f(x)= \begin{cases} 1 & x>1 \\ -1, & x<1 \end{cases}$

কার্যপদ্ধতির পর্যায়ক্রমিক ধাপ

1. প্রথমে একটি পরিষ্কার ছক কাগজ নিন। ছক কাগজের ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রগুলি সুষম হতে হবে।

2. ছক কাগজে $x\acute{o}x$ ও $y\acute{o}y$ দুটি পরস্পরছেদী সরলরেখা অঙ্কন করুন । O কে মূলবিন্দু, $x\acute{o}x$ ও $y\acute{o}y$ কে যথাক্রমে x ও y অক্ষ ধরুন। বর্গক্ষেত্রের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য 0.2 একক ধরুন।
3. x- এর সকল বাস্তব মানের জন্য y- এর মান শুধুমাত্র 1 ও –1 পাওয়া যাবে। নিম্নে ছকাকারে কতকগুলি বিন্দু নিন। এবং তা 2নং শর্তমতে ছক কাগজে স্থাপন করুন। পেন্সিল দ্বারা বিন্দুগুলি যোগ করলেই নির্ণেয় লেখচিত্র পাওয়া যাবে। তবে x=1- এর জন্য y এর মান পাওয়া যাবে না, কারণ উক্ত বিন্দুতে ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত।

x	0	0	2	–2	2	3
y	1	–1	1	1	–1	1

বহুপদী ফাংশন

সংজ্ঞা: যদি n পূর্ণ সংখ্যা হয় এবং a_0, a_1, a_2...........a_n বাস্তব বা জটিল সংখ্যা হয় তবে-

$f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+$- - - - - - - $+a_xx^n$ কে x এর প্রেক্ষিতে বহুপদী বলা হয়।

n কে এই বহুপদীর মাত্রা বা ঘাত বলা হয়।

1. $ax^2+bx+c, \quad a \neq 0$ দ্বিঘাত বহুপদী
2. x^2+2x+2 দ্বিঘাত বহুপদী
3. $x(x-1)(x+3)$ ত্রিঘাত বহুপদী
4. x^4+4x+4 চতুর্ঘাত বহুপদী ইত্যাদি

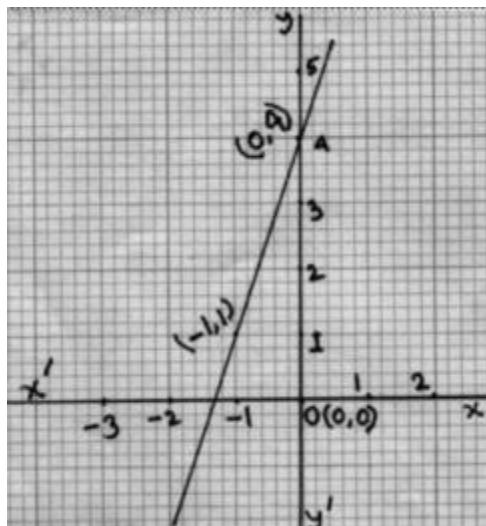
সমস্যা নং-4		তারিখঃ

সমস্যা: $y = 3x+4$- এর লেখচিত্র অঙ্কন করুন এবং এর বৈশিষ্ট্য লিখুন।

সমাধান: তত্ত্ব (Theory)- $y = 3x+4, \quad x \in R$

কার্যপদ্ধতির পর্যায়ক্রমিক ধাপ

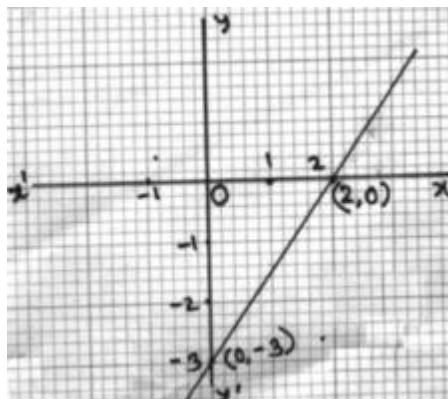
1. প্রথমে একটি পরিষ্কার ছক কাগজ নিতে হবে যার ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রগুলি সুষম।
2. সরলরেখার ক্ষেত্রে দুটি বিন্দু সংযোগ করলেই তার লেখচিত্র পাওয়া যাবে। $x = 0$ বসালে, $y = 4$ হয়। সুতরাং (0, 4) একটি বিন্দু। আবার, $x = -1$ বসালে, $y =1$ হয়। সুতরাং (–1, 1) অপর একটি বিন্দু।
3. $x\acute{o}x$ ও $y\acute{o}y$ কে যথাক্রমে x ও y অক্ষরেখা এবং O কে মূলবিন্দু ধরুন। উভয় অক্ষ বরাবর বর্গক্ষেত্রের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য 0.2 একক ধরে ছক কাগজে বিন্দু দুটি বসান এবং যোগ করুন । এই সংযোগ রেখাই নির্ণেয় লেখচিত্র ।

x	y
0	4
–1	1

সমস্যা নং-5		তারিখঃ

সমস্যাঃ $3x–2y = 6$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করুন।

সমাধানঃ তত্ত্ব (Theory)- $3x–2y=6$, $x \in R$

কার্যপদ্ধতির পর্যায়ক্রমিক ধাপ

1. প্রথমে একটি পরিষ্কার ছক কাগজ নিন যার বর্গক্ষেত্রগুলি সুষম।
2. সরলরেখার লেখচিত্র অঙ্কনের ক্ষেত্রে দুটি বিন্দু নির্ণয় করুন। $x = 0$ বসালে, $y = –3$। সুতরাং $(0, –3)$ সরলরেখার উপর একটি বিন্দু। আবার, $y = 0$ বসালে, $x = 2$; সুতরাং $(2, 0)$ সরলরেখার উপর অপর একটি বিন্দু।
3. $xóx$ ও $yóy$ কে যথাক্রমে x ও y অক্ষ এবং O কে মূলবিন্দু ধরুন। উভয় অক্ষ বরাবর বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য 0.2 একক ধরে বিন্দু দুটি ছক কাগজে স্থাপন করে সংযোগ করুন । ইহাই নির্ণেয় লেখচিত্র।

বহুপদী ফাংশন নয় ঃ $\sqrt{x}$, a^x, e^x, $\log x$

বহুপদী ফাংশনের লেখচিত্র

সমস্যা নং-6		তারিখঃ

সমস্যাঃ $y = x^2$- এর লেখচিত্র অঙ্কন করে বৈশিষ্ট্য আলোচনা করুন ।

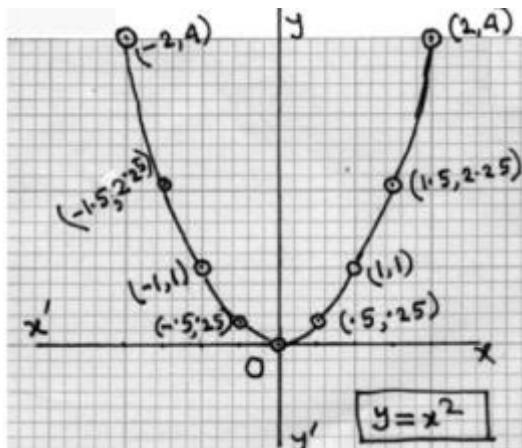
সমাধানঃ তত্ত্ব- $y = x^2, x\in R$

কার্যপদ্ধতির পর্যায়ক্রমিক ধাপ

1. সুষম বর্গক্ষেত্র বিশিষ্ট একটি ছক কাগজ নিতে হবে।

2. O কে মূলবিন্দু ধরে তার মধ্যদিয়ে x ও y অক্ষ অঙ্কন করতে হবে।
3. x- এর বিভিন্ন মানের জন্য y- এর বিভিন্ন মান নির্ণয় করতে হবে।

x	–2	–1.5	–1	–0.5	0	0.5	1	1.5	2
y	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4

4. বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য 0.2 একক ধরে 3 নং এ প্রাপ্ত বিন্দুগুলি ছক-কাগজে বসিয়ে বিন্দুগুলি যোগ করুন । ইহাই নির্ণেয় লেখচিত্র।

সমস্যা নং-7		তারিখঃ

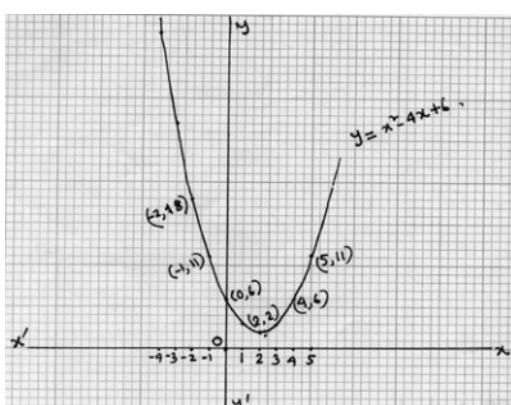
সমস্যা: $y = x^2 – 4x+6$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করে বৈশিষ্ট্য আলোচনা করুন ।

সমাধান: তত্ত্ব- $y = x^2 – 4x+6, x\in R$

কার্যপদ্ধতির পর্যায়ক্রমিক ধাপ

1. $y = x^2 – 4x+6$ ফাংশনটির সর্বোচ্চ ঘাত দুই। সুতরাং এটি একটি পরাবৃত্তকে নির্দেশ করবে। এটির x-এর সমন্বিত পদগুলি নিয়ে একটি বর্গাকার রাশি তৈরী করতে হবে এবং অন্য রাশিগুলি যোগ বা বিয়োগ চিহ্ন দিয়ে রেখে দিতে হবে। অর্থাৎ $y = x^2 – 4x+4+2 = (x–2)^2 +2$
2. যেহেতু $(x–2)^2 \geq 0$ সেহেতু ফাংশনটির সর্বনি মান হবে 2 এবং নির্দিষ্ট কোন সর্বোচ্চ মান পাওয়া যাবে না।
3. x- এর বিভিন্ন মানের জন্য y- এর বিভিন্ন মান নির্ণয় করুন ।

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	38	27	18	11	6	3	2	3	6	11

4. x- অক্ষ বরাবর বর্গক্ষেত্রের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য 0.5 একক এবং y- অক্ষ বরাবর বর্গক্ষেত্রের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য 0.1 একক ধরে 3 নং প্রাপ্ত মানগুলি বসিয়ে যোগ করুন । যোগফলটি নির্ণেয় লেখচিত্র।

সমস্যা নং-8		তারিখঃ

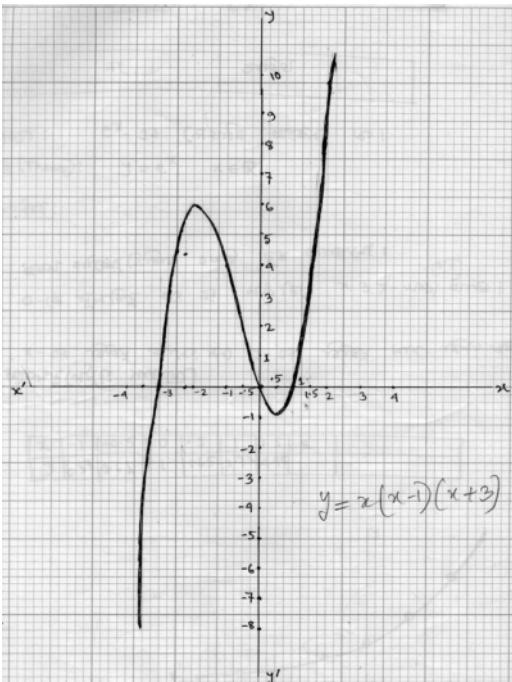
সমস্যাঃ $y = x(x-1)(x+3)$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করুন ।

সমাধানঃ তত্ত্ব- $y = x(x-1)(x+3), \quad x \in R$

কার্যপদ্ধতির পর্যায়ক্রমিক ধাপ

1. সুষম বর্গক্ষেত্রেবিশিষ্ট একটি ছক কাগজ নিন।
2. O কে মূলবিন্দু ধরে $x\acute{o}x$ ও $y\acute{o}y$ অক্ষদ্বয় অঙ্কন করুন ।
3. x- এর বিভিন্ন মানের জন্য y- এর মান নির্ণয় করুন ।

x	–3.5	–3	–2.5	–2	–1	–.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
y	–7.875	0	4.375	6	4	1.875	0	–0.875	0	3.375	10	20.62

4. x ও y এর উভয় অক্ষ বরাবর বর্গক্ষেত্রের ক্ষুদ্র চার বাহু সমান এক একক ধরে 3নং এর প্রাপ্ত বিন্দুগুলো প্রতিস্থাপন করুন ।
5. বিন্দুগুলো সাবলীল ভাবে সংযোগ করুন । ইহাই নির্ণেয় লেখচিত্র।

সূচক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন

সমস্যা নং-9		তারিখঃ

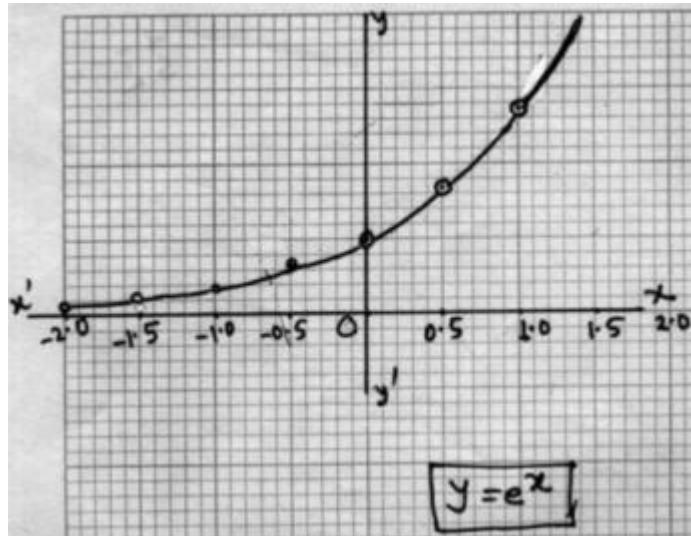
সমস্যাঃ e^x ফাংশনের এর লেখচিত্র অঙ্কন করুন ।

সমাধানঃ তত্ত্ব (Theory)- $y = e^x, x \in R$

কার্যপদ্ধতির পর্যায়ক্রমিক ধাপ

1. সুষম বর্গক্ষেত্র বিশিষ্ট একটি ছক কাগজ নিন।
2. O কে মূলবিন্দু ধরে এর মধ্য দিয়ে x ও y অক্ষ রেখা অঙ্কন করুন ।
3. x এর বিভিন্ন মানের জন্য y- এর বিভিন্ন মান নির্ণয করুন । [ক্যালকুলেটরের সাহায্যে]

x	–1	–0.5	0	0.5	1	1.5
y	0.37	0.61	1	1.65	2.72	4.48

4. x- অক্ষ বরাবর বর্গক্ষেত্রের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য 0.1 একক ধরে এবং y অক্ষ বরাবর বর্গক্ষেত্রের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য 0.2 একক ধরে (3) নং এ প্রাপ্ত বিন্দুগুলি স্থাপন করুন এবং বিন্দুগুলির সংযোগ রেখাই নির্ণেয় লেখচিত্র।

সমস্যা নং-10		তারিখঃ

সমস্যা: e^{-x} এর লেখ অঙ্কন করে এর বৈশিষ্ট্য আলোচনা করুন ।

সমাধান: তত্ত্ব- (Theory) ঃ $y = e^{-x}, x \in R$

কার্যপদ্ধতির পর্যায়ক্রমিক ধাপ

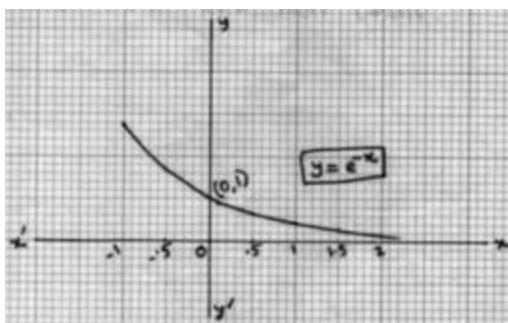
1. একটি ছক কাগজ নিন যার বর্গক্ষেত্রগুলি সুষম।
2. O কে মূলবিন্দু ধরে O এর মধ্য দিয়ে x ও y অক্ষ রেখা অঙ্কন করুন ।
3. x- এর বিভিন্ন মানের জন্য y- এর অনুরূপ মান নির্ণয় করুন ।

পদ্ধতি: ক্যালকুলেটরের সাহায্যে-

$x = 1$- এই একটি মানের জন্য দেখানো হলো-

[AC] [1] [SHIFT/INV] [ln] [=] 2.72 (আসন্ন)

x	-1	-0.5	0	0.5	1.0	1.5	2
y	2.72	1.65	1	0.61	0.37	0.22	0.14

4. x- অক্ষ বরাবর প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য 0.1 একক এবং y- অক্ষ বরাবর 0.2 একক ধরে উপরোক্ত বিন্দুগুলি বসিয়ে যোগ করুন। ইহাই নির্ণেয় লেখচিত্র।

লেখচিত্রের বিশেষ পর্যালোচনা:

1. x এর সসীম মানের জন্য e^{-x} কখনও শূন্য হয় না।
2. লেখচিত্রটি কখনও x- অক্ষকে অতিক্রম করে নীচে যায় না।

3. $x = 0$ হলে লেখচিত্রটি y – অক্ষকে ছেদ করে।
4. x এর মান যতই বাড়বে লেখচিত্রটি x- অক্ষের ততই নিকটবর্তী হবে।
5. লেখচিত্রটি x অক্ষ বা y- অক্ষ সাপেক্ষে প্রতিসম নয়।

সম্ভাব্য মৌখিক প্রশ্ন

1. e এর মান কত?
2. e এর রেঞ্জ কি?
3. e এর ডোমেন কত?
4. e^x এর লেখচিত্রে x- অক্ষ ও y- অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম কিনা?
5. লেখচিত্রটি কখনও x- অক্ষকে অতিক্রম করে কিনা?

লেখচিত্রের প্রয়োগ

1. অর্থনীতি, ব্যবসা শাস্ত্রে অর্থের চাহিদা ও সরবরাহের হিসাব নিকাসের অবস্থা এই লেখ চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়।
2. চিকিৎসা শাস্ত্রে, রসায়ন বিজ্ঞান, পদার্থ বিজ্ঞান, প্রকৌশল বিদ্যায়, সমাজ কল্যাণ, সমাজ বিজ্ঞানে এই লেখচিত্র ব্যবহার হয়ে থাকে।

লগ-ফাংশন

সমস্যা নং-11		তারিখঃ

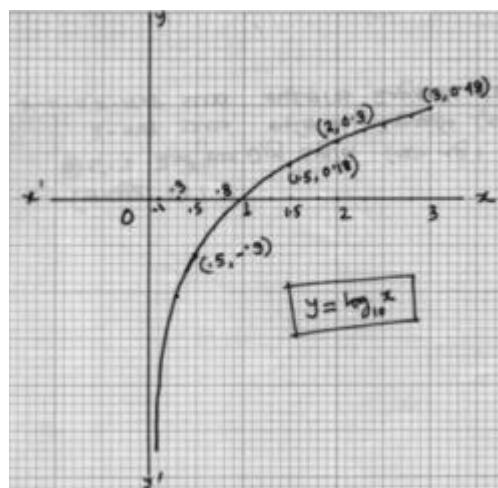
সমস্যা: $y = \log_{10}x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করুন (x সর্বদা বাস্তব ও ধনাত্মক)

সমাধান: তত্ত- $y = \log_{10}x, \quad x>0$

সমাধান: কার্যপদ্ধতির পর্যায়ক্রমিক ধাপ

1. একটি ছক কাগজ নিন যার বর্গক্ষেত্রগুলো সুষম।
2. O বিন্দুকে মূল বিন্দু ধরে $x'ox$ ও $y'oy$ অক্ষরেখা অঙ্কন করুন।
3. x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য সাইন্টিফিক ক্যালকুলেটরের সাহায্যে y এর বিভিন্ন মান পাওয়া যাবে।
4. x এর একটি মানের প্রেক্ষিতে y এর একটি মান বসিয়ে লেখচিত্র অঙ্কনের বিন্দুগুলি পাওয়া যাবে। x এর বিভিন্ন মানের জন্য y এর বিভিন্ন মান ক্যালকুটারের সাহায্যে নির্ণয় করুন।

x	0.1	0.3	0.5	0.8	1	1.1	1.3	1.5	1.8	2	2.3	2.5	2.8	3.0
y	–1	–0.5	–0.3	0.22	0	0.41	0.11	0.18	0.25	0.3	0.37	0.39	0.45	0.48

5. x অক্ষ বরাবর বর্গক্ষেত্রের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য 0.1 একক এবং y- অক্ষ বরাবর বর্গক্ষেত্রের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য 0.05 একক ধরে 3নং এ প্রাপ্ত মানগুলি বসিয়ে যোগ করুন। যোগফল নির্ণেয় লেখচিত্র হবে।

সমস্যা নং-12		তারিখঃ

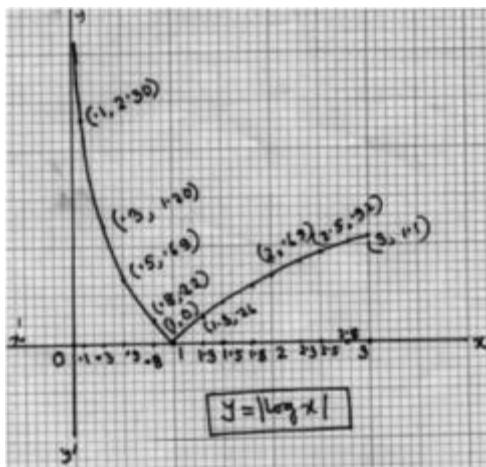
সমস্যাঃ $|\log x|$ - এর লেখচিত্র অঙ্কন করে এর বৈশিষ্ট্য আলোচনা করুন।

সমাধানঃ তত্ত্ব- $y = |\log x|, \quad x>0$

কার্যপদ্ধতির পর্যায়ক্রমিক ধাপ

1. সুষম বর্গক্ষেত্র বিশিষ্ট একটি ছক কাগজ নিন।
2. O কে মূল বিন্দু ধরে তার মধ্য দিয়ে x ও y অক্ষ অঙ্কন করুন।
3. x এর ধনাত্মক বিভিন্ন মানের জন্য y এর বিভিন্ন মান নির্ণয় করুন। [ক্যালকুলেটরের সাহায্যে]

x	0.1	0.3	0.5	0.8	1	1.3	1.5	1.8	2	2.3	2.5	2.8	3
y	2.30	1.20	0.69	0.22	0	0.26	0.41	0.59	0.69	0.83	0.92	1.03	1.1

4. x ও y অক্ষ বরাবর বর্গক্ষেত্রের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য 0.1 একক ধরে 3নং এ প্রাপ্ত মানগুলি বসিয়ে যোগ করুন। যোগফল নির্ণেয় লেখচিত্র হবে।

বিশেষ পর্যালোচনাঃ

1. x এর মান কখনও ঋণাত্মক হতে পারে না। তাই লেখচিত্রটি y- অক্ষের বাম পার্শে যাবে না।
2. এর পর x এর মান বাড়ার সাথে সাথে y এর মানও বাড়বে।

বৃত্তীয় ফাংশনের লেখচিত্র

সমস্যা নং-13		তারিখঃ

সমস্যাঃ $\sin 2x$- এর লেখচিত্র অঙ্কন করে বৈশিষ্ট্য আলোচনা কর।

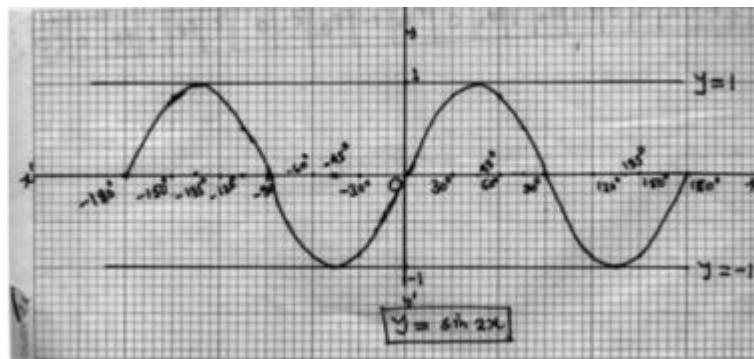
সমাধানঃ তত্ত্ব- $y = \sin 2x, -\pi \le x \le \pi$

কার্যপদ্ধতির পর্যায়ক্রমিক ধাপ

1. এমন একটি ছক কাগজ নিন যার বর্গক্ষেত্রগুলি সুষম।
2. O কে মূলবিন্দু ধরে ছক-কাগজে (Graph–paper) x ও y অক্ষ অঙ্কন করুন।
3. x- এর বিভিন্ন মানের জন্য y- এর অনুরূপ মান নির্ণয় করুন।

x	–180°	–150°	–135°	–120°	–105°	–90°	–75°	–60°	–45°	–30°
y	0	0.87	1	0.87	0.5	0	–0.5	–0.87	–1	–0.87

0°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	180°
0	0.87	1	0.87	0.5	0	–0.5	–0.87	–1	–0.87	0

4. x অক্ষ বরাবর বর্গক্ষেত্রের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য 6° এবং y- অক্ষ বরাবর বর্গক্ষেত্রের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য 0.1 একক ধরে বিন্দুগুলি বসিয়ে যোগ করুন। ইহাই নির্ণেয় লেখচিত্র।

লেখের বৈশিষ্ট্য:

1. এটি একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন।
2. এটি একটি অযুগ্ম ফাংশন।
3. এটির সর্বোচ্চমান 1 এবং সর্বনিম্নমান -1
4. মূলবিন্দু এবং যে সমস্ত বিন্দু $\frac{\pi}{2}$ এর গুণিতক সে সকল বিন্দুতে x- অক্ষকে লেখটি ছেদ করে।
5. এই লেখটির পর্যায়কাল 2π

সমস্যা নং-14		তারিখঃ

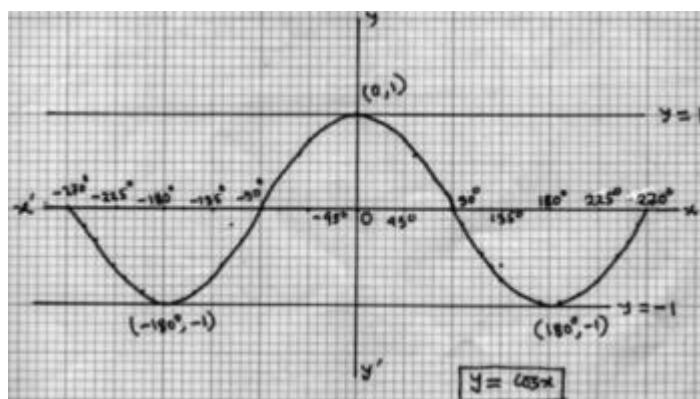
সমস্যা: $\cos x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করুন।

সমাধান: তত্ত্ব (Theory)- $y = \cos x, \quad \frac{-3\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$

কার্যপদ্ধতির পর্যায়ক্রমিক ধাপ

1. সুষম বর্গক্ষেত্রবিশিষ্ট একটি ছক-কাগজ নিন।
2. O কে মূলবিন্দু ধরে এর মধ্য দিয়ে x ও y অক্ষ অঙ্কন করুন।
3. x- এর বিভিন্ন মানের জন্য y- এর মান নির্ণয় করুন।

x	–270°	–225°	–180°	–135°	–90°	–45°	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°
y	0	–0.71	–1	–0.71	0	0.71	1	0.71	0	–0.71	–1	–0.71	0

4. x অক্ষ বরাবর বর্গক্ষেত্রের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য 9° এবং y অক্ষ বরাবর বর্গক্ষেত্রের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য 0.1 একক ধরে 3নং এ প্রাপ্ত মানগুলি ছক-কাগজে বসিয়ে যোগ করুন। যোগফল নির্ণেয় লেখচিত্র।

লেখের বৈশিষ্ট্য:

1. লেখটি একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন।
2. এটি যুগ্ম ফাংশন।

3. এটির সর্বোচ্চ মান 1 এবং সর্বনিম্ন মান –1.
4. এটি $\frac{\pi}{2}$ - এর বিজোড় গুণিতকের জন্য x অক্ষকে ছেদ করবে।
5. এই লেখটির পর্যায় কাল π।

বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন

সমস্যা নং-15		তারিখঃ

সমস্যাঃ $\cos^{-1}x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করুন। (মূখ্যমান ধরে)

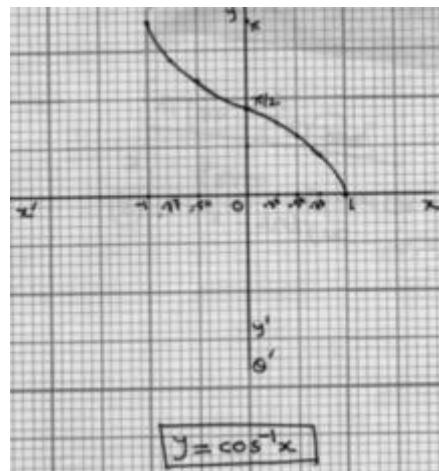
সমাধানঃ তত্ত্ব- ধরুন, $y = \cos^{-1}x, \quad x \in R$

কার্যপ্রণালীর পর্যায়ক্রমিক ধাপ

1. একটি ছক কাগজ নিন যার বর্গক্ষেত্রগুলি সুষম।
2. O কে মূলবিন্দু ধরে x ও y অক্ষ আকুন। x অক্ষের দিকে ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য $= 0.1$ একক এবং y অক্ষের দিক বরাবর বর্গক্ষেত্রের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য $=10°$ ধরুন।
3. x এর বিভিন্ন মান বসিয়ে y এর অনুষঙ্গী মান নির্ণয় করুন।

x	–1	–0.77	–0.50	0	0.30	0.5	0.77	1
y	180°	140°	120°	90°	72.5°	60°	40°	0

নির্ণেয় পদ্ধতি SHIFT ∅ cos ∅ .77 ∅ +/– ∅ = 140° [প্রায়]

4. 2-এর স্কেল অনুযায়ী 3নং প্রাপ্ত মানগুলি ছক কাগজে বসিয়ে সাবলীলভাবে যোগ করুন। প্রাপ্ত বক্ররেখাটি নির্ণেয় লেখচিত্র।

লেখের বৈশিষ্ট্যঃ

1. এটি y- অক্ষকে $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
2. x- অক্ষকে $(1, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

সমস্যা নং-16		তারিখঃ

সমস্যাঃ $\tan^{-1}2x\ (-\infty < x < \infty)$- এর লেখচিত্র অঙ্কন করুন।

সমাধানঃ তত্ত্ব- $y = \tan^{-1}2x, x \in R$

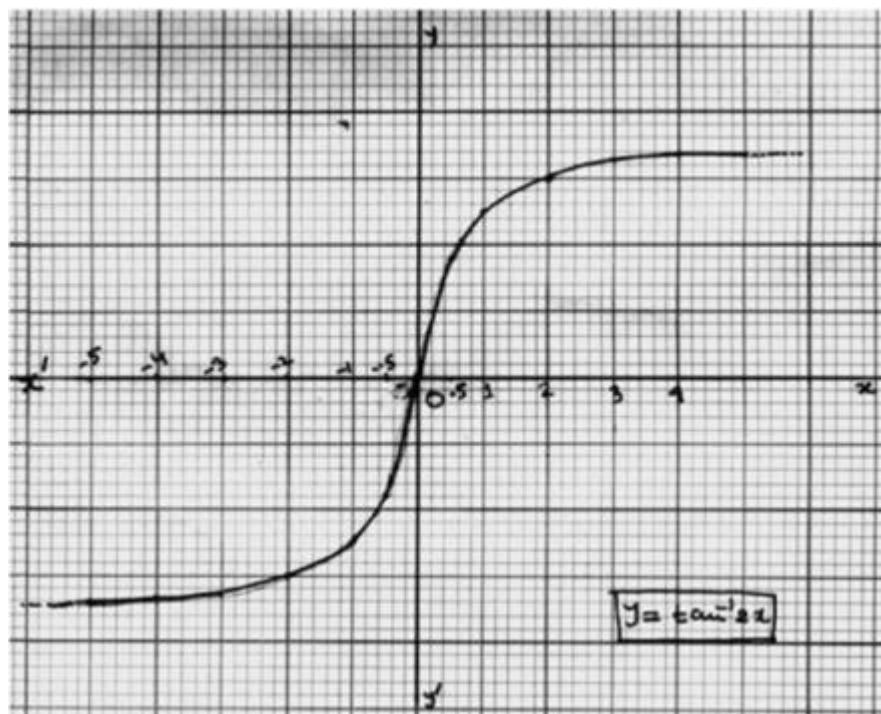
কার্যপ্রণালীর পর্যায়ক্রমিক ধাপ

1. এমন একটি ছক কাগজ নিন যার বর্গক্ষেত্রগুলি সুষম।
2. O কে মূল বিন্দু ধরে x ও y অক্ষ অঙ্কন করুন। x অক্ষ বরাবর বর্গক্ষেত্রের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য $= 0.1$ একক এবং y অক্ষ বরাবর প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য $= 5°$ ধরুন।

3. x- এর বিভিন্ন মানের জন্য y- এর বিভিন্ন মান নির্ণয় করুন।

x	–4	–3	–2	–1	–0.5	0	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0
y	–83°	–81°	–76°	–63°	–45°	0	45°	63°	76°	81°	83°

নির্ণয়ের পদ্ধতি ঃ SHIFT ∅ tan ∅ 4 ∅ +/– ∅ ¥ ∅ 2 = – 0.83 (প্রায়)

4. 2নং এর উল্লেখিত স্কেল অনুযায়ী (3)নং এর প্রশ্ন মানগুলি ছক কাগজে বসিয়ে বিন্দুগুলি যোগ করুন। উৎপন্ন বক্ররেখাই নির্ণেয় লেখচিত্র।

লেখের বৈশিষ্ট্য:

1. লেখটি মূলবিন্দু গামী।
2. লেখটি অবিচ্ছিন্ন।

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.৪

1. ঘ 2. খ 3. ক 4. ঘ 5. গ 6. ক 7. ঘ
8. ঘ 9. ক 10. গ 11. খ 12. ঘ